

Matematická analýza 2

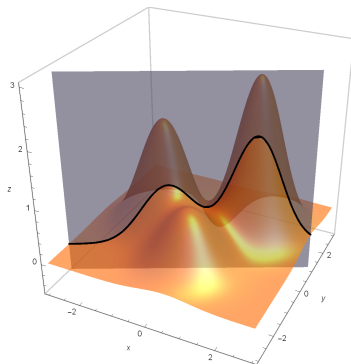
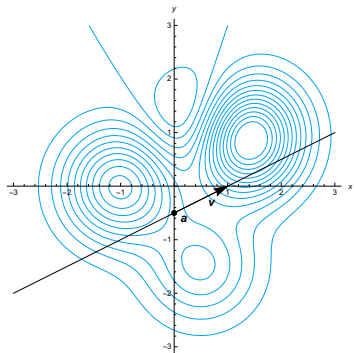
Směrová a parciální derivace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

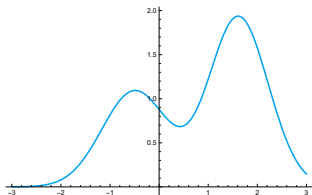
Motivace

- Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazuje bodům na mapě D nadmořskou výšku.
- V mapě se vydáme z bodu \mathbf{a} rovnoměrně přímočaře rychlostí \mathbf{v} . Jaká bude okamžitá změna nadmořské výšky v bodě \mathbf{a} ?



Motivace

- Zkonstruuujeme „průřezovou funkci“ $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.



- Okamžitá změna nadmořské výšky v bodě \mathbf{a} při rovnoměrně přímočarém pohybu rychlostí \mathbf{v} je

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Směrová derivace

Definice (směrová derivace)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathbf{a} je vnitřní bod množiny D a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Vektor $\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$ se nazývá **směrová derivace (řádu 1) funkce f v bodě \mathbf{a} ve směru \mathbf{v}** , jestliže

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Má-li f v nějakém bodě směrovou derivaci (řádu 1) ve směru \mathbf{v} , potom se funkce

$$\nabla_{\mathbf{v}} f : \mathbf{x} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$$

nazývá **směrová derivace (řádu 1) funkce f ve směru \mathbf{v}** .

- Položme $\varphi(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Potom

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

kde $\varphi'(0) = (\varphi'_1(0), \dots, \varphi'_m(0))$.

- Existuje-li směrová derivace $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, pak je určena jednoznačně.
- $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\nabla_{\mathbf{v}}f_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla_{\mathbf{v}}f_m(\mathbf{a}))$, má-li jedna ze stran rovnosti smysl.
- $\nabla_{\mathbf{0}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- Funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ je spojitá, ale nemá směrovou derivaci v bodě $\mathbf{0}$ v žádné směru $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Příklady

Příklad

- ① Ať $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ a $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. Potom pro každé $\mathbf{v}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

- ② Mějme funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$ a vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2.$$

Speciálně

$$\nabla_{(0,1)} f(2, 1) = -8,$$

$$\nabla_{(-1,0)} f(2, 1) = 4.$$

Základní pravidla

Tvrzení (směrová derivace a aritmetické operace)

*Nechť reálné funkce f a g mají směrovou derivaci v bodě \mathbf{a} ve směru \mathbf{v} .
Potom*

- 1 $\nabla_{\mathbf{v}}(f + g)(\mathbf{a}) = \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) + \nabla_{\mathbf{v}}g(\mathbf{a});$
- 2 $\nabla_{\mathbf{v}}(fg)(\mathbf{a}) = [\nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})]g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})[\nabla_{\mathbf{v}}g(\mathbf{a})];$
- 3 *je-li $g(\mathbf{a}) \neq 0$, pak*

$$\nabla_{\mathbf{v}}\frac{f}{g}(\mathbf{a}) = \frac{[\nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})]g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})[\nabla_{\mathbf{v}}g(\mathbf{a})]}{[g(\mathbf{a})]^2}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Zobecnění Lagrangeovy věty o střední hodnotě

Definice (úsečka)

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Úsečka s krajními body \mathbf{x} a \mathbf{y} je množina

$$\text{seg}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Věta (o střední hodnotě)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in D$ a $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ splňují $\text{seg}(\mathbf{a}; \mathbf{a} + \mathbf{h}) \subseteq D$. Předpokládejme, že $f \upharpoonright_{\text{seg}(\mathbf{a}; \mathbf{a} + \mathbf{h})}$ je spojitá funkce a navíc existuje $\nabla_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in \text{seg}(\mathbf{a}; \mathbf{a} + \mathbf{h}) \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}\}$. Potom existuje $\xi \in (0, 1)$ tak, že

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \nabla_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Směrová derivace vyšších řádů

Definice (směrová derivace vyšších řádů)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- 1 Je-li $k \geq 2$ přirozené číslo, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ a \mathbf{a} je vnitřní bod definičního oboru funkce $\nabla_{\mathbf{v}_{k-1}} \dots \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{f}$, potom se vektor

$$\nabla_{\mathbf{v}_k} \dots \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{f}(\mathbf{a}) := \nabla_{\mathbf{v}_k} (\nabla_{\mathbf{v}_{k-1}} \dots \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{f})(\mathbf{a})$$

nazývá **směrová derivace funkce f řádu k v bodě \mathbf{a} ve směrech $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$** .

- 2 Existuje-li v nějakém bodě směrová derivace funkce f řádu k ve směrech $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, potom funkci

$$\nabla_{\mathbf{v}_k} \dots \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}_k} \dots \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

nazýváme **směrovou derivací funkce f řádu k ve směrech $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$** .

Směrové derivace vyšších řádů

- Značení:
 - $\nabla_{\mathbf{h}}^0 f(\mathbf{a}) := f(\mathbf{a})$ pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.
 - $\nabla_{\mathbf{h}}^k f(\mathbf{a})$... směrová derivaci řádu $k \in \mathbb{N}$ v bodě \mathbf{a} ve směrech $\mathbf{v}_1 = \mathbf{h}, \dots, \mathbf{v}_k = \mathbf{h}$.
- Později si ukážeme, že obecně neplatí rovnost mezi $\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ a $\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{a})$.

Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$. Již víme, že pro $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ je $\nabla_{\mathbf{v}} f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2$. Pro $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ proto je

$$\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{v}} f(x, y) = -2v_1 w_1 - 8v_2 w_2.$$

Speciálně

$$\nabla_{\mathbf{v}}^2 f(x, y) = -2v_1^2 - 8v_2^2.$$

Je směrová derivace lineární vzhledem ke směru?

Pro funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$ je pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zobrazení

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2$$

lineární. Je to obecný jev?

Tvrzení (homogenita vzhledem ke směru)

Ať $\alpha \in \mathbb{R}$ a vektorová funkce \mathbf{f} má směrovou derivaci v bodě \mathbf{a} ve směru \mathbf{v} . Potom

$$\nabla_{\alpha\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \alpha \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Je směrová derivace lineární vzhledem ke směru?

Příklad

Nechť $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ a

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Potom

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(0, 0) = \begin{cases} \frac{v_1^2}{v_2}, & \text{je-li } v_1 \in \mathbb{R} \text{ a } v_2 \neq 0; \\ 0, & \text{je-li } v_1 \in \mathbb{R} \text{ a } v_2 = 0. \end{cases}$$

Tedy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ není lineární zobrazení.

Parciální derivace – motivace

Úmluva

Pokud neřekneme jinak, budeme pod symbolem e_i rozumět i -tý vektor standardní báze v \mathbb{R}^n . Tedy

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

- Ukázali jsme si, že $v \mapsto \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ není obecně lineární zobrazení.
- Později však uvidíme, že pro „hezké“ funkce je $v \mapsto \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ lineární.
- Pokud $v \mapsto \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a})$ je lineární, pak pro $v = (v_1, \dots, v_n)$ je

$$\nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n v_i \nabla_{e_i} \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Parciální derivace

Definice (parciální derivace)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a \mathbf{a} je vnitřní bod množiny D . Směrová derivace

$$\nabla_{e_i} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{t}$$

se nazývá **parciální derivace (řádu 1) funkce f v bodě \mathbf{a} podle i -té proměnné**. Místo $\nabla_{e_i} f(\mathbf{a})$ píšeme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, kde x_i označuje i -tou proměnnou funkce f , a v takovém případě často mluvíme o **parciální derivaci (řádu 1) funkce f v bodě \mathbf{a} podle x_i** . Má-li f parciální derivaci v nějakém bodě, pak se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

nazývá **parciální derivace (řádu 1) funkce f podle i -té proměnné (případně parciální derivace (řádu 1) funkce f podle x_i)**.

Parciální derivace

- Alternativní značení $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a})$: $\partial_{x_i} \mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{x_i}(\mathbf{a})$ apod.
- Existuje-li parciální derivace, pak je určena jednoznačně.
- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce jedné reálné proměnné x , pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a).$$

- Ať f_1, \dots, f_m jsou složky vektorové funkce $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
Potom

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right).$$

má-li jedna ze stran rovnosti smysl.

- Je-li $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorová funkce jedné reálné proměnné x , pak místo $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(a)$ píšeme $\mathbf{f}'(a)$ (případně $\frac{d\mathbf{f}}{dx}(a)$). Zřejmě

$$\mathbf{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a)).$$

Příklady

Příklad

Pro $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ máme

$$\mathbf{f}'(t) = (1, 2t).$$

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 - 3y^3 + x^4y^3.$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^3y^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -9y^2 + 3x^4y^2.$$

Příklady

Příklad

Je-li

$$f(x, y) = \frac{e^{2x+y}}{y},$$

pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{y}e^{2x+y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y-1}{y^2}e^{2x+y}.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (parciální derivace vyšších řádů)

Ať $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$ a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Potom **parciální derivace funkce \mathbf{f} řádu k v $\hat{\mathbf{x}}$ podle x_{i_1}, \dots, x_{i_k}** je vektor

$$\frac{\partial^k \mathbf{f}}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{a}) := \nabla_{\mathbf{e}_{i_k}} \dots \nabla_{\mathbf{e}_{i_1}} \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Existuje-li v nějakém bodě parciální derivace funkce \mathbf{f} řádu k podle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , potom funkci

$$\frac{\partial^k \mathbf{f}}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} : \mathbf{x} \mapsto \frac{\partial^k \mathbf{f}}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x})$$

nazýváme **parciální derivací funkce \mathbf{f} řádu k podle x_{i_1}, \dots, x_{i_k}** .

Parciální derivace vyšších řádů

Terminologie a značení:

- Místo „parciální derivace řádu k “ říkáme také k -tá parciální derivace.
- **Smíšenou parciální derivací** rozumíme parciální derivaci, ve které derivujeme alespoň podle dvou různých proměnných.
- Místo

$$\frac{\partial^k \mathbf{f}}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{a}).$$

můžeme také psát $\partial_{x_{i_k}} \dots \partial_{x_{i_1}} \mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(\mathbf{a})$ apod.

- Pokud se bezprostředně za sebou opakuje derivování podle jedné a téže proměnné, zápis často ještě zkracujeme. Například

$$\frac{\partial^5 \mathbf{f}}{\partial z \partial x \partial x \partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^5 \mathbf{f}}{\partial z \partial x^2 \partial y \partial x}(x, y, z) = \partial_z \partial_x^2 \partial_y \partial_x \mathbf{f}(x, y, z).$$

Parciální derivace vyšších řádů

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x \cos y.$$

Záměnnost parciálních derivací

Příklad

Ať

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}, & \text{pro } (x, y) \neq 0; \\ 0, & \text{pro } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(0, 0).$$

Věta (Schwarzova věta)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ na nějakém okolí bodu \mathbf{a} a jsou spojité v bodě \mathbf{a} , potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Důležité rovnice (nejen) ve fyzice

1 Laplaceova rovnice:

$$\Delta u = 0,$$

kde $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ se nazývá Laplaceův operátor.

2 Rovnice vedení tepla (nazývaná také rovnice difúze):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0,$$

kde $k > 0$.

3 Vlnová rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

kde $c > 0$.