Matematická analýza 2

Funkce třídy C^k

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Funkce třídy C^k

Definice (Funkce třídy C^k)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

1. Řekneme, že $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^0, jestliže $\boldsymbol{f}$ je spojitá.
2. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že vektorová funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^k, jestliže všechny její parciální derivace řádu k jsou spojité.
3. Řekneme, že $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^∞, jestliže $\boldsymbol{f}$ je třídy C^k pro každé $k \in \mathbb{N}_0$.
4. Ať $\Omega \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{f} : M \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^k na Ω, jestliže funkce $\boldsymbol{f} \restriction_\Omega$ je třídy C^k.

Množina všech funkcí $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ třídy C^k, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se značí symbolem $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Je-li $m = 1$, pak místo $C^k(\Omega; \mathbb{R})$ píšeme jen $C^k(\Omega)$.

Funkce třídy C^k

Alternativní názvosloví:
Funkce třídy C^1 (na Ω) ... spojitě diferencovatelná funkce (na Ω).
Funkce třídy C^k (na Ω) ... k-krát spojitě diferencovatelná funkce (na Ω).

Příklad

1. Polynomy jsou funkce třídy C^∞.
2. Racionální funkce jsou funkce třídy C^∞.
3. Ať $f_0(x) = |x|$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ položíme

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^k, ale není třídy C^{k+1}.

Funkce třídy C^k

Platí:

- Vektorová funkce je třídy C^k na Ω právě tehdy, když všechny její složky jsou třídy C^k na Ω.
- $$C^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset C^1(\Omega) \subset C(\Omega)$$
- Ať $f, g \in C^k(\Omega)$. Potom $f + g \in C^k(\Omega)$ a $fg \in C^k(\Omega)$. Jestliže navíc g nenabývá nuly v žádném bodě množiny Ω, pak $\frac{f}{g} \in C^k(\Omega)$.
- Jestliže $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a $G \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny, $\boldsymbol{g} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $f \in C^k(G)$ a $\boldsymbol{g}(\Omega) \subseteq G$, potom $f \circ \boldsymbol{g} \in C^k(\Omega)$.
- Jestliže $k, l \in \mathbb{N}$ splňují $2 \leq l \leq k$, potom parciální derivace řádu l funkce $f \in C^k(\Omega)$ nezávisí na pořadí proměnných, podle kterých derivujeme.

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom)

Ať $k \in \mathbb{N}_0$ a f je reálná funkce třídy C^k na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Polynom

$$T_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \nabla^i_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{a}),$$

se nazývá Taylorův polynom řádu k funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

Ať f je reálná funkce třídy C^k na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

- Pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\nabla^k_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} h_{i_1} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a}).$$

- Různých parciálních derivací řádu k funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ je $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Taylorův polynom

Definice (Hessova matice)

Ať reálná funkce f je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Čtvercová matice

$$H_f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

se nazývá Hessova matice funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

- Hessova matice je symetrická.
- Je-li f reálná funkce třídy C^2 na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, potom s využitím sloupcového zápisu vektorů můžeme pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ psát

$$\nabla_{\boldsymbol{h}}^2 f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h} \cdot \left(\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}\right).$$

Taylorův polynom

Taylorův polynom T_k řádu $k \in \mathbb{N}_0$ funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ je

$$\begin{aligned} T_k(\boldsymbol{x}) = & f\left(\boldsymbol{a}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a_i\right) \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{a}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_i - a_i\right)\left(x_j - a_j\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\boldsymbol{a}\right) \\ & + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \left(x_{i_1} - a_{i_1}\right) \dots \left(x_{i_k} - a_{i_k}\right) \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}\left(\boldsymbol{a}\right). \end{aligned}$$

Speciální případy:

- $$T_0(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$
- $$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}).$$
- Píšeme-li vektory do sloupce, pak

$$T_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right) \cdot \left(\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a})\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right)\right).$$

Taylorův polynom

Příklad

Je dána funkce $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$. První tři Taylorovy polynomy funkce f v bodě $\boldsymbol{a} = (0,0)$ jsou

$$\begin{aligned}
T_0(x,y) &= 0, \\
T_1(x,y) &= x + 2y, \\
T_2(x,y) &= x + 2y - \frac{1}{2}\left(x^2 + 4xy + 4y^2\right).
\end{aligned}$$

Taylorův polynom

Připomeňme, že pokud f je reálná funkce jedné proměnné třídy C^{k+1}, kde $k \in \mathbb{N}_0$, na nějakém okolí bodu a, potom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$

kde ξ je bod ležící v otevřeném intervalu s krajními body a, x a klademe $(x-a)^0 = 1$.
Bod ξ lze vyjádřit ve tvaru $\xi = a + \lambda(x-a)$ pro nějaké $\lambda \in (0,1)$.
Položíme-li navíc $h = x - a$, pak

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}h^i + \frac{f^{(k+1)}(a+\lambda h)}{(k+1)!}h^{k+1}$$

pro nějaké $\lambda \in (0,1)$.

Taylorův polynom

Věta (Taylorův vzorec s Lagrangeovým zbytkem)

Ať $k \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ a $\operatorname{seg}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \subseteq \Omega$. Jestliže f je reálná funkce třídy C^{k+1} na Ω a T_k je Taylorův polynom řádu k funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, potom

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = T_k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) + \frac{1}{(k+1)!} \nabla_{\boldsymbol{h}}^{k+1} f\,(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{h})$$

pro nějaké $\lambda \in (0,1)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Ve speciálním případě $k=1$ můžeme závěr předchozí věty psát ve tvaru:

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h} \cdot (\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{h})\boldsymbol{h})\,.$$

pro nějaké $\lambda \in (0,1)$.

Taylorův polynom

Příklad

Je dána funkce

$$f(x,y) = \ln(1+x+2y).$$

Potom pro každé $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ splňující $1+x+2y>0$ existuje $\lambda \in (0,1)$ tak, že

$$f(\mathbf{0}+\boldsymbol{h}) = f(x,y) = x + 2y + R_f(x,y),$$

kde

$$R_f(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)H_f(\lambda x, \lambda y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Protože

$$|R_f(\boldsymbol{h})| \leq 2\,\|\boldsymbol{h}\|_1^2\,,$$

obdržíme například $f\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right) \approx \frac{1}{5}$ a $\left|R_f\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)\right| \leq \frac{9}{200} \leq \frac{1}{20}$.

Taylorův polynom

Věta (Taylorův vzorec s Peanovým zbytkem)

Ať $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{a} \in \Omega$. Jestliže f je reálná funkce třídy C^k na Ω a T_k je její Taylorův polynom řádu k v bodě $\boldsymbol{a}$, potom existuje funkce $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \omega(\boldsymbol{h}) = 0 = \omega(\boldsymbol{0})$ a pro každé $\boldsymbol{h} \in \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x} \in \Omega\}$ platí

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = T_k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|^k \, \omega(\boldsymbol{h}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o implicitní funkci – motivace

Mějme dánu rovnici

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ať M je množina všech jejích řešení.

- Množina M není grafem žádné reálné funkce jedné proměnné x.
- Je množina M alespoň lokálně grafem nějaké reálné funkce jedné proměnné x?
- Na okolí bodů $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ nelze M popsat grafem žádné funkce proměnné x.
- Na okolí bodu $(0, 1)$ můžeme psát $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Věta o implicitní funkci

Věta (o implicitní funkci)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená,* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *a* $f(x_1, \ldots, x_n, y) = f(\boldsymbol{x}, y)$ *je funkce třídy* C^k *na* Ω*. Předpokládejme, že bod* $(\boldsymbol{a}, b) \in \Omega$ *splňuje*

1. $f(\boldsymbol{a}, b) = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}, b) \neq 0.$

Pak existují $U(\boldsymbol{a}) \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $U(b) \subseteq \mathbb{R}$ *a* $g \in C^k(U(\boldsymbol{a}))$ *tak, že*

1. $U(\boldsymbol{a}) \times U(b) \subseteq \Omega$*,*
2. $\{(\boldsymbol{x}, y) \in U(\boldsymbol{a}) \times U(b) \,|\, f(\boldsymbol{x}, y) = 0\} = \{(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \,|\, \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a})\}$*,*
3. $$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}$$

   pro každé $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a})$ *a každé* $i = 1, \ldots, n$*.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o implicitní funkci

- Lze dokázat i „vektorovou verzi" věty o imlicitní funkci.
- Vzorec
$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}$$
je jednoduchý důsledek řetízkového pravidla.

Příklad

Je dána funkce $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2$. Zřejmě

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x, y) = 0\right\} = \{(-1, 0), (1, 0)\}.$$

není lokálně grafem žádné funkce třídy C^∞. To není spor s Větou o implicitní funkci, neboť $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$.

Věta o implicitní funkci

Nechť $f \in C^1(\Omega)$, $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq 0$ a $M = \operatorname{lev}(f; f(\boldsymbol{a}))$.

- Vektor $\nabla f(\boldsymbol{a})$ je vektor kolmý k M v bodě $\boldsymbol{a}$.
- Tečná nadrovina k M v bodě $\boldsymbol{a}$ je nadrovina popsaná rovnicí

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0.$$

Příklad

Ať $f(x, y) = x^2 - y^2$ a $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$. Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ je tečná rovina k hladině funkce $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ výšky 0. Její normálový vektor je

$$\nabla g(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1), -1 \right) = (4, -2, -1),$$

což souhlasí s naší definicí tečné roviny ke grafu funkce.

Věta o implicitní funkci

Příklad

Tečná rovina k elipsoidu

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1 \right\}$$

v bodě $(3, -1, -2)$ je rovina o rovnici

$$\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 2 = 0.$$

Věta o inverzní funkci

Kdy lze funkci třídy C^k alespoň lokálně invertovat tak, aby inverze byla opět třídy C^k?

Věta (o inverzní funkci)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{f} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \Omega$ je $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{a})$ invertibilní (tj. $\det \boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$) a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Pak existují otevřené množiny U a V v $\mathbb{R}^n$ tak, že

1. *$\boldsymbol{a} \in U$, $\boldsymbol{b} \in V$, $\boldsymbol{f}$ je prosté na U a $\boldsymbol{f}(U) = V$;*
2. *je-li $\boldsymbol{g} : V \to \mathbb{R}^n$ inverzní zobrazení k $\boldsymbol{f} \restriction_U$, pak $\boldsymbol{g} \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$ a navíc*
$$\boldsymbol{J_g}(\boldsymbol{b}) = \left[\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}))\right]^{-1}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o inverzní funkci – záměna proměnných

Nechť $c > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $\mathbf{\Phi} : (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u,v) = (x+ct, x-ct)$.

- $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a jeho inverze $\mathbf{\Phi}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou třídy C^∞.
- Položme $g = f \circ \mathbf{\Phi}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pak g je třídy C^2, $f = g \circ \mathbf{\Phi}$ a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0$ na $\mathbb{R}^2$. Obecné řešení vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

na $\mathbb{R}^2$ proto je

$$f(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct),$$

kde $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ jsou libovolné.