Matematická analýza 2

Posloupnosti a řady funkcí

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Posloupnost funkcí

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f_k : D \to \mathbb{R}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ se nazve posloupnost funkcí na D.

Definice (bodová konvergence)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \subseteq D$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ funkcí na D konverguje bodově k f na M, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ je

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

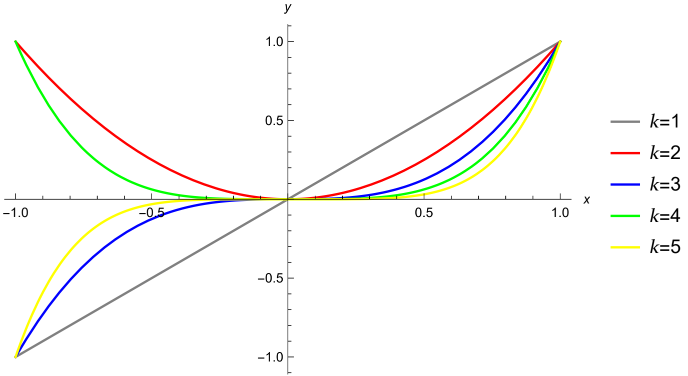
Terminologie a značení:

- $f_k \to f$ na M ... $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje bodově k f na M.
- $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje bodově na M ... existuje $f : M \to \mathbb{R}$ tak, že $f_k \to f$ na M.

Posloupnost funkcí

Příklad

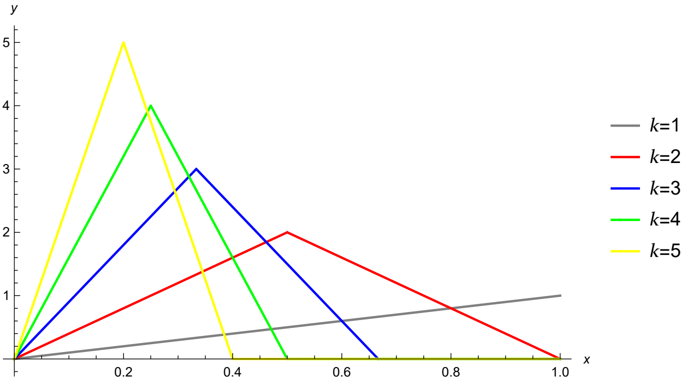
Nechť $f_k(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$. Potom $f_k \to f$ na $(-1, 1]$, kde $f(x) = 0$ pro každé $x \in (-1, 1)$ a $f(1) = 1$.



Posloupnost funkcí

Příklad

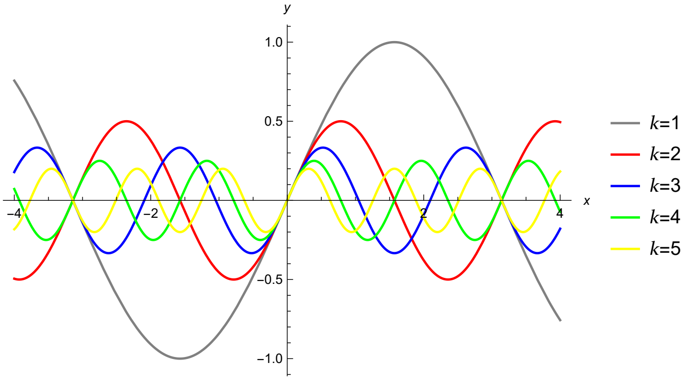
Nechť $f_k = k^2 x \chi_{[0,\frac{1}{k}]}(x) + k^2 \left(\frac{2}{k} - x\right) \chi_{\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right]}(x)$. Potom $f_k \to f$ na $[0,1]$, kde $f(x) = 0$. Snadno ukážeme, že $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.



Posloupnost funkcí

Příklad

Nechť $f_k(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$. Potom $f_k \to f$ na $\mathbb{R}$, kde $f(x) = 0$. Snadno ukážeme, že například $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k'(0) \neq f'(0)$.



Stejnoměrná konvergence

Definice (stejnoměrná konvergence)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \subseteq D$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ funkcí na D **konverguje stejnoměrně k f na M**, jestliže

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in M} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

- $f_k \rightrightarrows f$ na M ... $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na M.
- $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ **konverguje stejnoměrně na M** ... existuje $f : M \to \mathbb{R}$ tak, že $f_k \rightrightarrows f$ na M.
- $f_k \rightrightarrows f$ na M právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k \geq K(\varepsilon)$ a pro každé $x \in M$ je $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- Je-li $N \subseteq M$ neprázdná a $f_k \rightrightarrows f$ na M, potom $f_k \rightrightarrows f\restriction_N$ na N.
- Je-li $f_k \rightrightarrows f$ na M, potom $f_k \to f$ na M.

Stejnoměrná konvergence

Příklad

1. Nechť
$$f_k(x) = x^k$$
pro každé $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ nekonverguje stejnoměrně na $(-1, 1]$.
2. Nechť
$$f_k(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$$
pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom $f_k \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$, kde $f(x) = 0$.

Věta (spojitost a stejnoměrná konvergence)

Ať $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí na $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f_k \rightrightarrows f$ na M. Potom f je spojitá.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Stejnoměrná konvergence

Věta (záměna limity a integrálu)

Jestliže f_k *je spojitá funkce na intervalu* $[a,b]$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a* $f_k \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$*, potom*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Věta (záměna limity a derivace)

Jestliže f_k *je třídy* C^1 *na intervalu* (a,b) *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, $f_k \to f$ *na* (a,b) *a* $f_k' \rightrightarrows g$ *na* (a,b)*, potom* $f \in C^1((a,b))$ *a* $f' = g$*.*

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Řady funkcí

Ať $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{a} \in D$.

- $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ ... (nekonečná) řada funkcí na D.
- $(s_m)_{m=1}^{+\infty} := (\sum_{k=1}^{m} f_m)_{m=1}^{+\infty}$ ... posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$.
- $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ konverguje (resp. absolutně konverguje) v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(\boldsymbol{a})$ konverguje (resp. absolutně konverguje).
- $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ diverguje v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(\boldsymbol{a})$ diverguje.
- Konverguje-li řada absolutně v bodě $\boldsymbol{a}$, pak konverguje v bodě $\boldsymbol{a}$.

Konvergence řady funkcí

Definice (konvergence řady funkcí na množině)

Ať $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ je řada funkcí na $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $(s_m)_{m=1}^{+\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů a $M \subseteq D$.

1. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje (bodově) na M, jestliže konverguje v každém bodě množiny M.
2. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na M, jestliže
$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{m\to+\infty} s_m(\boldsymbol{x})$$
pro každé $\boldsymbol{x} \in M$. Píšeme $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in M$.
3. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje absolutně (bodově) na M, jestliže absolutně konverguje v každém bodě množiny M.
4. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na M, jestliže $(s_m)_{m=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně na M.

Geometrická řada

Ať $f_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pro každé celé nezáporné číslo k. Potom pod $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} f_{k-1}$ funkcí na D.

Příklad (geometrická řada)

Uvažme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, kde klademe $x^0 = 1$.

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| \geq 1$ řada diverguje.
2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| < 1$ řada konverguje (dokonce absolutně) a platí
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nekonverguje stejnoměrně na $(-1, 1)$. Ale konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[-a, a]$, kde $0 < a < 1$.

Důsledky stejnoměrné konvergence řady funkcí

Věta (záměna řady a integrálu)

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *je řada spojitých funkcí na* $[a,b]$ *konvergující stejnoměrně k* f *na* $[a,b]$, *pak* f *je spojitá funkce a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (záměna řady a derivace)

Jestliže f_k *je třídy* C^1 *na intervalu* (a,b) *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ *konverguje na* (a,b) *a* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k'$ *konverguje stejnoměrně na* (a,b), *potom*

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Věta (Weierstrassovo kritérium)

Jestliže $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ *je posloupnost funkcí na* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *existuje* $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *tak, že* $|f_k(\boldsymbol{x})| \leq \lambda_k$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in M \subseteq D$*. Jestliže* $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$ *konverguje, pak* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně na* M*.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

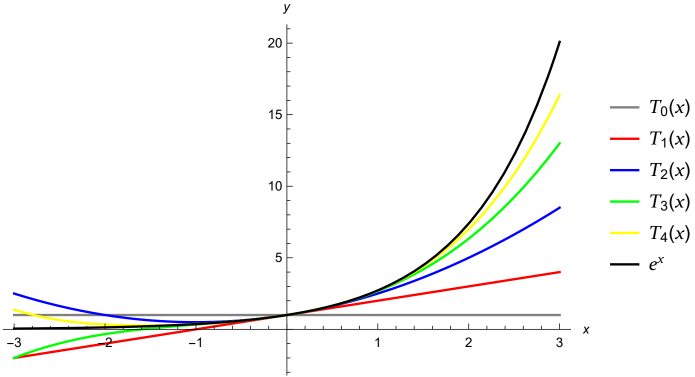
Řada

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Mocninné řady – motivace

- Taylorův polynom řádu $k \in \mathbb{N}_0$ funkce e^x v bodě 0 je
$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k.$$
- Lze e^x psát jako „nekonečný polynom“ $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$?



Mocninné řady

Definice

Řada tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

kde klademe $(x - x_0)^0 = 1$, se nazývá mocninná řada se středem $x_0 \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_k \in \mathbb{R}$.

- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu. Konverguje ještě v jiných bodech?
- Konverguje mocninná řada stejnoměrně na nějaké množině?

Poloměr konvergence mocninné řady

Definice (poloměr konvergence)

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^n$ je číslo

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, r^k < \infty \right\} \in [0, +\infty].$$

Je-li $R > 0$, pak $(x_0 - R, x_0 + R)$ se nazývá interval konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^k$.

Tvrzení (význam poloměru konvergence)

Nechť R je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^k$. Potom $\sum_{k=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^k$

1. *konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < R$.*
2. *diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| > R$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Číselné řady – opakování

Tvrzení (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *je řada nenulových reálných čísel a*

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L \in [0,+\infty].$$

1. *Jestliže* $L < 1$, *pak* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně.*
2. *Jestliže* $L > 1$, *pak* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverguje.*

Tvrzení (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *je řada reálných čísel* a_n *a*

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in [0,+\infty].$$

1. *Jestliže* $L < 1$, *pak* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně.*
2. *Jestliže* $L > 1$, *pak* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverguje.*

Poloměr konvergence mocninné řady

Příklad

1. $\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k \ldots R = 0.$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \ldots R = 1.$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k} \ldots R = 2.$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ldots R = \infty.$

Věta (stejnoměrná konvergence mocninné řady)

Jestliže $R > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^k$, potom pro každé $\delta \in (0, R)$ tato řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Integrace a derivace mocninné řady

Věta (Derivování člen po členu)

Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *má poloměr konvergence* $R>0$ *a součet* $f(x)$ *na* (x_0-R, x_0+R).

1. $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ *má poloměr konvergence* R.
2. *Funkce* f *je třídy* C^{∞} *a navíc*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

pro každé $x \in (x_0-R, x_0+R)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Integrace a derivace mocninné řady

Věta (Integrování člen po členu)

Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *má poloměr konvergence* $R > 0$ *a součet* $f(x)$ *na* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$ *má poloměr konvergence* R.
2. *Funkce*
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$
je primitivní funkce k funkci $f(x)$ *(tj.* $F'(x) = f(x)$*) na intervalu* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

1. Řada $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$ má součet $\frac{1}{(1-x)^2}$ pro $|x| < 1$.
2. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ má součet $-\ln(1 - x)$ pro $|x| < 1$.

Rozvoj funkce do mocninné řady

Ať $x_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$ a f je reálná funkce třídy C^∞ na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ ... Taylorova řada (případně Taylorův rozvoj) funkce f v bodě x_0.
- Platí $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$?

Příklad

Ať

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{je-li } x \neq 0; \\ 0, & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že f je třídy C^∞ a $f^{(k)}(0) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Tedy $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pro každé $x \neq 0$.

Rozvoj funkce do mocninné řady

Věta (Existence Taylorova rozvoje)

Nechť $k_0 \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ *a* f *je třídy* C^∞ *na* $(x_0 - r, x_0 + r)$. *Jestliže existuje* $L > 0$ *tak, že*

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq \frac{Lk!}{r^k}$$

pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *a pro všechna přirozená čísla* $k \geq k_0$, *potom*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Rozvoj funkce do mocninné řady

Terminologie:

- Taylorova řada z právě uvedené věty se také někdy nazývá rozvoj funkce f do mocninné řady na okolí bodu x_0.

Příklad

1. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
5. $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ pro $|x-1| < 1$.
6. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ pro $|x| < 1$.