Úvod

Zadání

1. Nalezněte rovnici roviny s normálovým vektorem $(-1, 2, 1)$, která obsahuje bod $(1, 2, 1)$.
2. Který z bodů $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2)$ a $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1)$ je nejblíže rovině popsané rovnicí $x - y = 0$?
3. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (2, 3, 0)$ a $\boldsymbol{b} = (1, 0, 3)$. Nalezněte $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{v}\|$ a ukažte, že $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.
4. Ukažte, že neplatí $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ pro všechna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$.
5. Ať $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}\|$.
6. V rovině jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (2, 0)^T$ a $\boldsymbol{v} = (0, 1)^T$ (v této úloze budeme psát vektory v $\mathbb{R}^2$ do sloupce). Ať $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nalezněte obsah S_1 rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a obsah S_2 rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$.
7. Načrtněte množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1 - x^2\}$.
8. Popište a načrtněte množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$, jestliže
   (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;
   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4y^2 - z = 0\}$;
   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 8y + 4z + 55 = 0\}$.
   (d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
9. Nalezněte střed a poloměr sféry o rovnici
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15.$$
10. Nalezněte, pokud existuje, limitu posloupnosti $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, jestliže
    (a) $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k-3k^2}{k+k^2}\right)$;
    (b) $\boldsymbol{x}_k = (1, \sin(\pi k), k)$;
    (c) $\boldsymbol{x}_k = \left(k - \sqrt{k^2 + k}, \sqrt[k]{k}, \frac{1}{k}\right)$;
    (d) $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{\sin k}{k}, k \sin \frac{1}{k}\right)$.
11. Rozhodněte, zda je množina M otevřená nebo uzavřená a nalezněte její vnitřek, hranici, uzávěr, hromadné body a izolované body, jestliže
    (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}$;
    (b) M je přímka v rovině (např. $M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$);
    (c) $M = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
    (d) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}$;
    (e) $M = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in (0, 1), \varphi \in [0, 2\pi], z \in (0, 1)\}$.

Výsledky

1. $-x + 2y + z - 4 = 0$.
2. Bod $\boldsymbol{a}$.
3. $v = (9, -6, -3)$, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{126}$.
4. Stačí položit například $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = (1, 0, 0)$ a $\boldsymbol{w} = (0, 1, 0)$.
6. $S_1 = 2$ a $S_2 = 2 \det A = 4$.
7. Množina ležící mezi dvěma parabolami $y = 1 - x^2$ a $y = x^2 - 1$.
8. (a) Čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
   (b) Hyperbolický paraboloid.
   (c) Elipsoid.
   (d) Množina ležící mezi dvěma sférami se středem v počátku. První sféra má poloměr 1 a druhá má poloměr 2.
9. $S = (1, 2, -4)$ a $R = 6$.
10. (a) $(0, -3)$.
    (b) limita neexistuje.
    (c) $(-1, 1, 0)$.
    (d) $(0, 1)$.
11. (a) Otevřená, $\operatorname{int}(M) = M$,

$$\begin{aligned} \partial M &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 1 \right\}, \\ \overline{M} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq 1 \right\}, \end{aligned}$$

    hromadné body jsou všechny body množiny $\overline{M}$, M nemá žádné izolované body.
    (b) Uzavřená, $\operatorname{int}(M) = \emptyset$, $\partial M = M$, $\overline{M} = M$, hromadné body jsou všechny body množiny M, M nemá žádné izolované body.
    (c) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}(M) = \emptyset$, $\partial M = \overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$, jediný hromadný bod je $(0, 0)$, izolované body jsou všechny body množiny M.
    (d) Není otevřená ani uzavřená,

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(M) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x^2 + y^2 < 1 \right\}, \\ \partial M &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\} \cup \{(0, 0), (2, 0)\}, \end{aligned}$$

    $\overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$, hromadné body jsou všechny body množiny

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

    jediný izolovaný bod je $(2, 0)$.

(e) Otevřená, $\operatorname{int}(M) = M$, $\partial M = N_1 \cup N_2$, kde

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \{0,1\}, \varphi \in [0, 2\pi], z \in (0,1) \right\}, \\
N_2 &= \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi], z \in \{0,1\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Dále $\overline{M} = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi], z \in [0,1]\}$, hromadné body jsou všechny body množiny $\overline{M}$, M nemá žádné izolované body.