Plošný integrál

Zadání

1. Nalezněte parametrizaci plochy S, jestliže
   (a) S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ležící mezi rovinami $z = 0$ a $z = 3\sqrt{3}$;
   (b) S je část roviny $z = x+3$ ležící v množině popsané nerovnostmi $x^2+y^2 = 1$ a $x \geq 0$;
   (c) S je plocha vzniklá rotací křivky $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, (ležící v rovině xy) kolem osy x.

2. Vypočtěte obsah plochy S, jestliže
   (a) S je plocha s parametrizací
   $$\mathbf{\Phi}(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u), \quad u, v \in [0, 2\pi],$$
   kde $0 < b < a$;
   (b) S je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ležící pod rovinou $z = 2$;
   (c) S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, která leží uvnitř kuželu $z^2 = x^2 + y^2$.

3. Vypočtěte plošný integrál z funkce f přes plochu S, jestliže
   (a) $f(x, y, z) = x$ a S je trojúhelník s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(0, 0, 4)$;
   (b) $f(x, y, z) = y^2$ a S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, která leží nad kuželem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (c) $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$ a S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;

4. Vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu S, jestliže
   (a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, -x, 2z)$ a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ je orientovaná normálovým polem s nekladnou třetí komponentou;
   (b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a $S = \{(x, y, x\sin y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 2], y \in [0, \pi]\}$ je orientovaná normálovým polem s nezápornou třetí komponentou;

5. Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, 5)$ a plocha
   $$S = \partial\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, x + y \leq 2\right\}$$
   orientovaná vnějším normálovým polem. Vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu S
   (a) z definice plošného integrálu;
   (b) pomocí Gaussovy věty.

6. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu S, jestliže

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (4x, y, 4z)$, S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ orientovaná vnějším normálovým polem;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$, S je hranice množiny $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$, kde $a, b, c > 0$, orientovaná vnějším normálovým polem;

(c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^2, xz^3, (z-1)^2)$, S je hranice množiny ohraničené plochami $x^2 + y^2 = 16, z = 1, z = 5$, která je orientovaná vnějším normálovým polem.

7. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte tok vektorového pole $\nabla \times \boldsymbol{F}$ orientovanou plochu S, jestliže

   (a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2 \sin z, y^2, xy)$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ ležící nad rovinou $z = 0$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu;

   (b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (ze^y, x\cos y, xz\sin y)$, S je polosféra $x^2+y^2+z^2 = 16$, $y \geq 0$, a její normálové pole má nezápornou druhou komponentu;

   (c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (6yz, 5x, yze^{x^2})$, plocha S je část paraboloidu $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ splňující $0 \leq z \leq 4$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu.

8. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél orientované křivky C, jestliže

   (a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (1, x + yz, xy - \sqrt{z})$, C je okraj části roviny $3x + 2y + z = 1$ nacházející se v prvním oktantu a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora;

   (b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^3, -x^3, y^2 + z^3)$, C je průnik válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$ s rovinou $x + y + z = 1$ a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora.

Výsledky

1. (a) $\mathbf{\Phi}(u,v) = (6\cos u \sin v, 6\sin u \sin v, 6\cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) $\mathbf{\Phi}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 3 + u\cos v)$, $u \in [0,1]$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) $\mathbf{\Phi}(u,v) = \left(u, \frac{\cos v}{1+u^2}, \frac{\sin v}{1+u^2}\right)$, $u \in [-1,1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
2. (a) $4\pi^2 ab$;
   (b) $\frac{13\pi}{3}$;
   (c) $4\pi(2 - \sqrt{2})$.
3. (a) $\sqrt{\frac{7}{3}}$;
   (b) $\frac{\pi}{12}(8 - 5\sqrt{2})$;
   (c) 16π.
4. (a) $-\frac{32}{3}\pi$;
   (b) $\frac{\pi^2}{2}$.
5. 4π.
6. (a) 96π;
   (b) $\frac{3}{4}a^2b^2c^2$;
   (c) 256π.
7. (a) 0;
   (b) 16π;
   (c) -152π.
8. (a) $\frac{1}{24}$;
   (b) 2π.