

# Limita a spojitost

## Zadání

1. Z definice spočtete limitu funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , jestliže

- (a)  $f(\mathbf{x}) = k$ , kde  $k \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $f(\mathbf{x}) = x_i$ , kde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

2. Rozhodněte, zda uvedené limity existují a pokud ano, tak je vypočtete.

- (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$ ;
- (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ ;
- (c)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{yz+xy}{x^2+y^2+z^2}$ ;
- (d)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$ ;
- (e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+y^2}$ ;
- (f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ .

3. Rozhodněte, zda je funkce  $f$  spojitá, jestliže

- (a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}, & x^2 \neq y^2, \\ 0, & x^2 = y^2; \end{cases}$
- (b)  $f(x, y) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$
- (c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$

4. Určete konstantu  $k \in \mathbb{R}$  tak, aby funkce  $f$  byla spojitá, jestliže

- (a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}, & x \geq y \text{ a } y \neq x-1, \\ k, & (x, y) = (2, 1); \end{cases}$
- (b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2+y^2}-2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ k, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

5. Určete funkci  $g$  tak, aby funkce  $f$  byla spojitá, jestliže

- (a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x-y}, & x \neq y, \\ g(x), & x = y; \end{cases}$
- (b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0, \\ g(x), & y = 0. \end{cases}$

## Výsledky

1. (a)  $k$ ;  
(b)  $a_i$ .
2. (a) neexistuje;  
(b) 0;  
(c) neexistuje;  
(d) 0;  
(e) 0;  
(f) 2.
3. (a) není (v bodě  $(0, 0)$  limita neexistuje);  
(b) není (v bodě  $(0, 0)$  limita neexistuje);  
(c) je.
4. (a) 2;  
(b)  $\frac{1}{2}$ .
5. (a)  $x^2$ ;  
(b)  $x$ .