

# Funkce třídy $C^k$

## Zadání

- Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ , jestliže
  - $f(x, y) = x^2 + xy - y$ ,  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ;
  - $f(x, y) = xe^{\sin y}$ ,  $\mathbf{a} = (-1, 0)$ ;
  - $f(x, y, z) = xyz$ ,  $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ .
- Nalezněte jednotkový normálový vektor k ploše o rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  v bodě
  - $(1, 0, 0)$ ;
  - $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .
- Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$  v bodě  $(4, 3, 4)$ .
- Nalezněte úhel sevřený dvěma plochami v bodě  $\mathbf{a}$ , jestliže
  - plochy jsou zadány rovnicemi  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  a  $\mathbf{a} = (0, -1, 0)$ ;
  - plochy jsou zadány rovnicemi  $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  a  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ .
- Nalezněte všechny body na elipsoidu  $3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ , ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou  $-12x + 2y + 6z = 0$ .
- Nalezněte všechny body na ploše  $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ , ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s některou ze souřadnicových rovin.
- Ať  $f(x, y, z)$  je třídy  $C^1$ . Vyjádřete  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ve sférických souřadnicích (tj.  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ ).
- Uvedené rovnice přepište do nových proměnných:
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $x = \frac{u+v}{2}$ ,  $y = \frac{u-v}{2}$ ;
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ;
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ ,  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ ;
- Ať  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  je otevřená množina,  $\varphi \in C^2(\Omega)$  a  $\mathbf{F} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$
$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Ukažte, že

- (a)  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ ;
- (b)  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ ;
- (c)  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$ .

10. Ať  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{A}$  je reálná matice  $3 \times 3$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Co musí splňovat matice  $\mathbf{A}$ , aby

- (a)  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ;
- (b)  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ .

## Výsledky

1. Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ , jestliže

(a)  $1 + 4(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 2)$ ;

(b)  $-1 + (x + 1) - y + (x + 1)y - \frac{y^2}{2}$ ;

(c)  $2 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + (z - 2) + 2(x - 1)(y - 1) + (x - 1)(z - 2) + (y - 1)(z - 2)$ .

2. (a)  $(1, 0, 0)$ ;

(b)  $\frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1)$ .

3.  $\frac{1}{2}(x - 4) + \frac{2}{3}(y - 3) - (z - 4) = 0$ .

4. (a)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ;

(b)  $\varphi = 0$ .

5.  $(-12, 1, 1)$ ,  $(12, -1, -1)$ .

6.  $(2, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, -1)$ .

7.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi},$$

kde  $g(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ .

8. (a)  $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ , kde  $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ ;

(b)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0,$$

kde  $g(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ;

(c)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0,$$

kde  $g(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ .

10. (a)  $\text{Tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ ;

(b)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .