Extrémy funkcí

Zadání

1. Klasifikujte všechny stacionární body funkce f, jestliže
   (a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$;
   (b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$;
   (c) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$;
   (d) $f(x,y) = y\cos x$;
   (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;
   (f) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, kde $x, y, z > 0$;
2. Rozhodněte, zda je funkce f konvexní, jestliže
   (a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$;
   (b) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + xy + yz$.
3. Je dána funkce $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - x$.
   (a) Nalezněte největší otevřenou množinu C, na které je f konvexní.
   (b) Klasifikujte stacionární body funkce f.
   (c) Je bod $(1,0)$ bodem extrému funkce f na C, kde C je množina z bodu (a)? Pokud ano, jakým?
4. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + \alpha xy + y$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby funkce f byla konvexní.
   (b) Pro každou hodnotu parametru α z předchozího bodu nalezněte všechny body minima funkce f.
5. Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-1,0)$, $(-\frac{1}{2},3)$, $(0,2)$ a $\left(\frac{1}{2},1\right)$ graf funkce
   (a) $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
6. Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ a $(2,5)$ graf funkce$f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
7. Nalezněte všechny body v rovině $x + y + z = 1$, které jsou nejblíže bodu $(2,0,-3)$.
8. Nalezněte všechny body na povrchu kuželu $z^2 = x^2 + y^2$, které jsou nejblíže bodu $(4,2,0)$.
9. Nalezněte body minima a maxima funkce f na množině M, jestliže
   (a) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$;

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, M je trojúhelník s vrcholy $(2,0), (0,2), (0,-2)$;

10. Nalezněte rozměry kvádru o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jeden vrchol má v rovině $x + 2y + 3z = 6$.

11. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte extrémy funkce f na množině M, jestliže

    (a) $f(x,y) = e^{-xy}$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;

    (b) $f(x,y,z) = x + y + z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

12. Mezi body množiny

$$M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\big\}$$

nalezněte všechny, které jsou nejblíže (resp. nejdále) od bodu $\boldsymbol{a} = (3,1,-1)$ a určete jejich vzdálenosti od $\boldsymbol{a}$.

13. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s největší třetí souřadnicí) na křivce, která je průnikem ploch o rovnicích $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ a $x + 2z = 4$.

14. Nalezněte tři nezáporná čísla, jejichž součet je 300 a součin je maximální.

15. Nalezněte vzdálenost paraboly $y = x^2$ od přímky $x - y - z = 0$.

Výsledky

1. (a) $(0,1)$, $(-1,-1)$ a $(1,-1)$ jsou sedlové body; $(-1,1)$ a $(1,1)$ jsou body ostrého lokálního minima; $(0,-1)$ je bod lokálního maxima.
   (b) $(0,0)$ je bod lokálního maxima; každý prvek v $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ je bodem lokálního minima (dokonce bodem minima).
   (c) $(0,0)$ je bod lokálního minima (jedná se dokonce o bod minima funkce f).
   (d) Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$ sedlový bod.
   (e) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ je bod lokálního minima.
   (f) $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ je bod lokálního minima.

2. Rozhodněte, zda je funkce f konvexní, jestliže
   (a) Není konvexní.
   (b) Je konvexní.

3. (a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
   (b) $(1,0)$ je bod lokálního minima a $(-1,0)$ je sedlový bod.
   (c) Jedná se o bod minima funkce f na C.

4. (a) f je konvexní pro $\alpha \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.
   (b) Pro každé $\alpha \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ má f jediný bod minima, a to $\left(\frac{\alpha}{8-\alpha^2}, \frac{-2}{8-\alpha^2}\right)$. Pro $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ bod minima neexistuje.

5. (a) $a = \frac{2}{5}, b = \frac{8}{5}$.
   (b) $a = -1, b = 1$.

6. $a = \frac{3}{7}, b = \frac{6}{5}, c = \frac{26}{35}$.

7. $\left(\frac{9}{3}, \frac{4}{3}, -3\right)$.

8. $\left(2, 1, \sqrt{5}\right)$, $\left(2, 1, -\sqrt{5}\right)$.

9. (a) $(-1,0)$ je bod minima a $(1,0)$ je bod maxima.
   (b) $(1, \sqrt{2})$ je bod maxima a všechny prvky množiny $\left\{(x,0) \,\middle|\, 0 \le x \le \sqrt{3}\right\} \cup \left\{(0,y) \,\middle|\, 0 \le y \le \sqrt{3}\right\}$ jsou body minima.
   (c) $(1,0)$ je bod minima; $(0,-2)$ a $(0,2)$ jsou body maxima.

10. $\left(2, 1, \frac{2}{3}\right)$.

11. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ jsou body minima; $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ jsou body maxima.
    (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$ je bod minima a $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ je bod maxima.

12. Nejblíže je bod $(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $15 - \frac{44}{\sqrt{11}}$. Nejdále je bod $(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $15 + \frac{44}{\sqrt{11}}$.

13. $(-4, 0, 4)$.

14. $x = y = z = 100$.

15. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$.