Lebesgueův integrál

Zadání

1. Zaměňte pořadí integrace v následujících dvojnásobných integrálech:
   (a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.
2. Záměnou pořadí integrace vypočtěte
   (a) $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
3. Vypočtěte $\int_M f$, jestliže
   (a) $f(x,y) = |y - \sin x|$, $M = [0,\pi] \times [0,1]$;
   (b) $f(x,y) = x\cos y$ a M je ohraničená křivkami $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$;
   (c) $f(x,y) = e^{-x-y}$, $M = (0,+\infty)^2$;
   (d) $f(x,y,z) = e^{\frac{z}{y}}$ a $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le y \le 1, y \le x \le 1, 0 \le z \le xy\}$;
   (e) $f(x,y,z) = y$ a M je množina v prvním oktantu ohraničená rovinami $x + y = 1$ a $y + z = 1$;
   (f) $f(x,y,z) = y$ a M je ohraničeno paraboloidem $y = 4x^2 + 4z^2$ a rovinou $y = 4$.
4. Zaměňte pořadí integrace v dvojnásobném integrálu
$$I = \int_0^1 \int_1^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
   Kromě toho vyjádřete I v polárních souřadnicích se středem v počátku (v obou pořadích).
5. Zaměňte pořadí integrace v součtu
$$I = \int_0^1 \int_{-x^2}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$
   Kromě toho vyjádřete I v polárních souřadnicích se středem v počátku, kde vnitřní integrace bude podle proměnné r.
6. Vhodnou substitucí vypočtěte $\int_M f$, jestliže
   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$ a M je ohraničena křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ a $x = 3y^2$; [Nápověda: $u = \frac{y}{x^2}$ a $v = \frac{x}{y^2}$.]
   (b) $f(x,y) = (x+y)\cos(\pi(x-y))$ a M je ohraničena křivkami $x + y = 0$, $x = 1$ a $x = 1 + y$; [Nápověda: $u = x + y$ a $v = x - y$.]

(c) $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ a $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$, kde $a, b > 0$;

(d) $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ a $M = \mathbb{R}^2$;

(e) $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$ a $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1, x \ge |y|\}$;

(f) $f(x,y,z) = z$ a M je ohraničená plochami $z = x^2 + y^2$ a $z = 4$;

(g) $f(x,y,z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$ a M je průnik prvního oktantu s koulí, jejíž střed je v počátku a poloměr je 1;

7. Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

   (a) $y = \sin x$ a $y = \cos x$, kde $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$;

   (b) $2x - 3y = 0$, $x + y = 5$ a $y = 0$;

8. Nalezněte hmotný střed homogenní rovinné desky M ohraničené křivkami $y = x^2$ a $x + y = 2$.

9. Nalezněte objem množiny M, jestliže

   (a) M je ohraničená plochami $y = x^2 + z^2$ a $y = 8 - x^2 - z^2$;

   (b) M je ohraničená plochami $y = x^2$, $z = 0$ a $y + z = 1$;

10. Nalezněte hmotný střed tělesa M, jestliže

    (a) M je ohraničené plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ a hustota je $\varrho(x,y,z) = y$;

    (b) M je průnik koule o středu 0 a poloměru $R > 0$ s poloprostorem $z \ge 0$ a hustota je $\varrho(x,y,z) = k > 0$.

11. Uvažme těleso $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\right\}$ s hustotou $\varrho(x,y,z) = z$. Nalezněte $a > 0$ tak, aby rovina $z = a$ rozdělila těleso M na dvě stejně těžké části.

12. Nalezněte moment setrvačnosti homogenního tělesa M o hmotnosti m vzhledem k ose p, jestliže

    (a) p je osa x a $M = [0,4] \times [0,2] \times [0,1]$;

    (b) p je osa z a $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le h\right\}$, kde $h > 0$;

    (c) p je osa z a $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le h\}$, kde $a, h > 0$;

    (d) p je osa z a $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$, kde $a > 0$.

Výsledky

1. (a) $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

   (b) $\int_0^{e^{-2}} \int_{-1}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{e^{-2}}^{e} \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. (a) $e^4 - 1$;

   (b) $\frac{2}{3}\sin 8$.

3. (a) $\pi - 2$;

   (b) $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$;

   (c) 1;

   (d) $\frac{e}{2} - \frac{7}{6}$;

   (e) $\frac{1}{12}$;

   (f) $\frac{16}{3}\pi$.

4.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{2\sqrt{2}}^{3} \int_0^{\sqrt{0-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}} \int_0^{3} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r + \int_1^{3} \int_0^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

5.

$$
I = \int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.
$$

6. (a) $\frac{2}{3}$;

   (b) $-\frac{1}{2\pi^2}$;

   (c) $\frac{2}{3}\pi ab$

   (d) 2π.

   (e) $\sqrt{2}$.

   (f) $\frac{64}{3}\pi$;

   (g) $\frac{\pi-2}{16}$;

7. (a) $2\sqrt{2}$;

   (b) 5;

8. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right)$.

9. (a) 16π.
   (b) $\frac{8}{15}$.

10. (a) $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.
    (b) $\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.

11. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

12. (a) $I_x = \frac{5}{3}m$.
    (b) $I_z = \frac{3mh^2}{10}$.
    (c) $I_z = \frac{ma^2}{2}$.
    (d) $I_z = \frac{2ma^2}{5}$.