

Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (05.09.2023)

Jméno:

Podpis:

| Příklad | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | Σ |
|---------|----|----|----|----|----|----------|
| Body | | | | | | |

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r .
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r .
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2 \sin \theta$.

Zadání

1. [10 bodů] Je dáno vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \sin y + e^{3z}, y + x^2 \cos y, 3xe^{3z} - 1).$$

- (a) Ukažte, že \mathbf{F} je potenciálové vektorové pole na \mathbb{R}^3 .
(b) Nalezněte potenciál f vektorového pole \mathbf{F} na \mathbb{R}^3 tak, aby $f(1, 0, 0) = 0$.

2. [10 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^2 - 12x.$$

3. [10 bodů] Ať křivka C je průnik kružnice $x^2 + y^2 = 4$ s polorovinou $x \geq 0$.

- (a) Nalezněte nějakou parametrizaci křivky C .
(b) Vypočtěte křivkový integrál funkce $f(x, y) = x^2 + y$ podél křivky C .

4. [10 bodů] Ať kompaktní množina M je ohraničená paraboloidem $z = 1 - x^2 - y^2$ a rovinou $z = -1$. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y \cos z, y^2 + x \sin z, z^2)$$

přes plochu $S = \partial M$ orientovanou vnějším normálovým polem.

5. [10 bodů] Je dána mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n n}.$$

- (a) Určete její poloměr konvergence a rozhodněte, zda řada konverguje v bodě -3 .
(b) Na intervalu konvergence nalezněte její součet.