VARIANTA A

1) a) $\nabla f(x,y) = \left(\sin(\pi y) - \frac{1}{x}, \pi x \cos(\pi y)\right)$

Jednotkový směr největšího růstu v bodě $(1,2)$ je vektor

$$\frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \frac{(-1,\pi)}{\|(-1,\pi)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}(-1,\pi).$$

b) Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(1,2)$ je

$$T(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot (x-1, y-2)$$

$$= -(x-1) + \pi(y-2)$$

2) Hledáme bod minima funkce $f(x,y) = y$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 5y^2 = 1\}$.

$$\lambda(2x+2y) = 0 \quad (1)$$

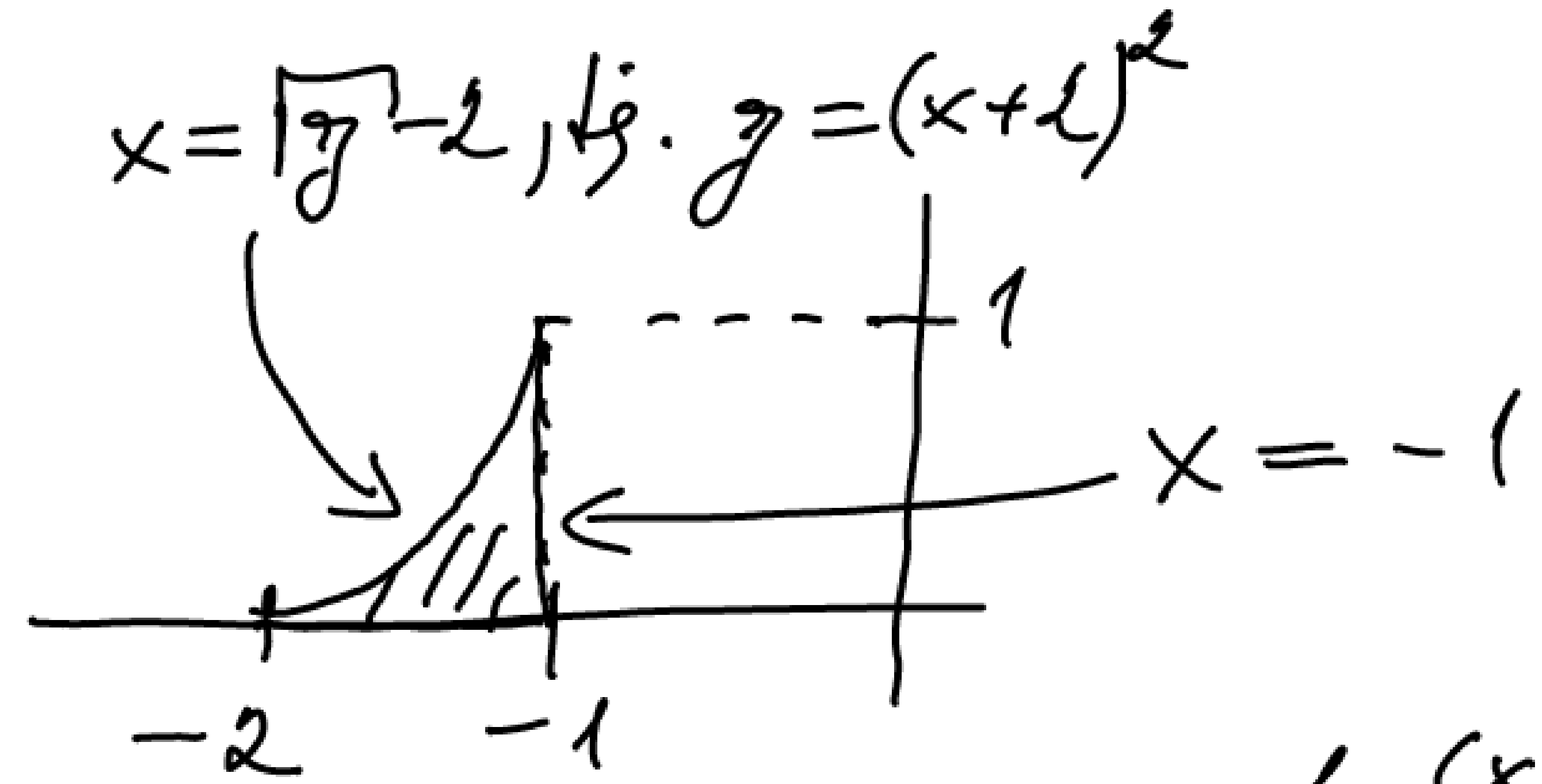
$$1 + \lambda(2x+10y) = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 2xy + 5y^2 = 1 \quad (3)$$

- $\lambda = 0$ ... spor s (2)
- $\lambda \neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = -y$. Dosazením do (3) máme $x^2 = \frac{1}{4}$. Tedy $x = \pm\frac{1}{2}$.

Protože $f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, je $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ bod v M s nejmenší druhou souřadnicí.

③



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}-2}^{-1} \frac{x}{(x+2)^2}\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1} \int_0^{(x+2)^2} \frac{x}{(x+2)^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

④ $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^{2k+3} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x^2)^k}{k!} = x^3 e^{2x^2}, \; x \in \mathbb{R}$$

(tedy $R = +\infty$).