Písemná část (06.02.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2])**.**

(a) Nalezněte všechna řešení rovnice

$$z^2 - 4z + 20 = 0.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = (2 - 2i)e^{3-\pi i}.$$

(c) Určete koeficient $a \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^k} + \sum_{n=-2}^{\infty} n^2 (z-1)^{2n}, \ z \in P(1),$$

měla v bodě $z_0 = 1$ pól řádu 3.

Úloha 2 ([10 bodů])**.**

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^7 (z+2)^2}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 3$ a určete parametry tohoto mezikruží.

(b) Mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2i)^n$ má poloměr konvergence $R = 2$. Konverguje v bodě $z = -i$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_C \frac{e^{iz} - i}{(\cos z)^2} + \frac{e^{iz} - i}{(\sin z)^2} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $\frac{\pi}{4} + i$, $\frac{\pi}{4} - i$ a $\frac{3\pi}{4}$.

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \mathbb{1}(t+5) - \mathbb{1}(t-1), \ t \in \mathbb{R}.$$

[Nápověda: Transformaci počítejte z definice, integrál NEroztrhávejte.]

(b) Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[(te^{-\frac{t^2}{4}}) * (e^{3it} h''(t)) \right](\omega).$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y'(t) + 3y(t) = e^{2t}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 5$ a $y'(0) = -2$.

(b) Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, je-li Laplaceův obraz řešení roven

$$Y(s) = \frac{1}{(s+7)^2(s+2)}.$$

$\boxed{6.\ 2.\ 2024}$

1) a) $z^2 - 4z + 20 = 0$

$(z-2)^2 - 4 + 20 = 0$

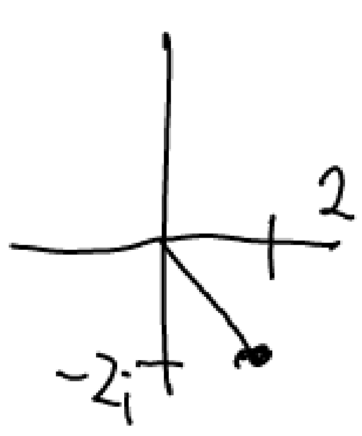
$(z-2)^2 = -16$

$z - 2 = \pm 4i$

$z = 2 \pm 4i$

b) $|z| = |2-2i|\,|e^{3-\pi i}| = \sqrt{8}\,e^3$

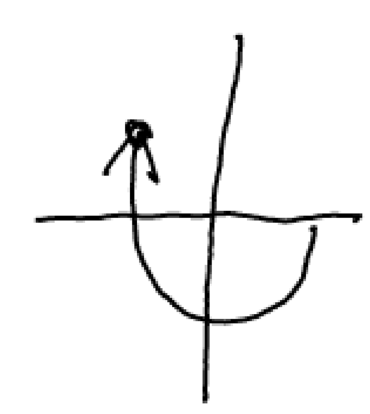
$|2-2i| = \sqrt{4+4}$



$\arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$

$-\pi \in \operatorname{Arg} e^{3-\pi i}$

$-\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4} \in \operatorname{Arg} z$



$\boxed{\text{2. kvadrant}}$

c) $g(z) = \frac{a}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^k} + \frac{4}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^2} + 0 + (z-1)^2 + \dots,\ z \in P(1)$

· Zvolíme-li $a = -4,\ k = 3$, pak $g(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2} + (z-1)^2 + \dots,\ z \in P(1)$, a funkce $g(z)$ má v bodě $z_0 = 1$ tedy pól řádu 3.

2) a)

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)^7}\cdot\frac{1}{(z+2)^2}=\dots=\frac{1}{(z-3)^7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}n(z-3)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}n(z-3)^{n-8}$$

pro $|z-3|<5$

$$\cdot\ \frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-3)+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-3}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3}{5}\right)^n=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(z-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(z-3)^n$$

pro $\left|-\frac{z-3}{5}\right|<1$

$|z-3|<5$

$$\cdot\ \left(\frac{1}{z+2}\right)'=-\frac{1}{(z+2)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(z+2)^2}=-\left(\frac{1}{z+2}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(z-3)^n\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}n(z-3)^{n-1}=$$

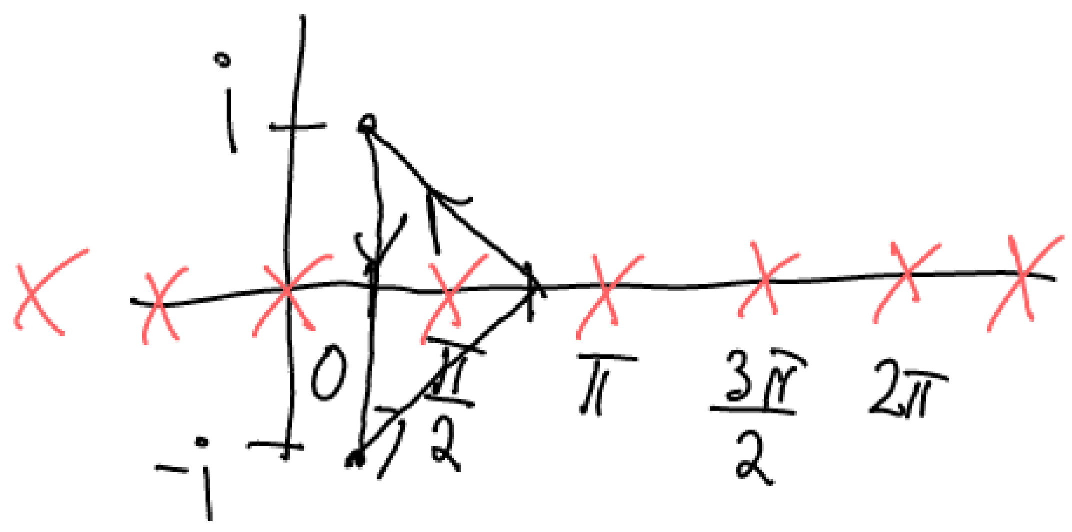
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}n(z-3)^{n-1}$$

b) $|-i-2i|<2\,?$

$|-3i|=3>2$ Nekonverguje.

3) $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$

$\sin z = 0 \iff z = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$



• $\int_C \frac{e^{iz} - i}{(\sin z)^2} dz = 0$ dle Cauchyovy věty

$$I = \int_C \frac{e^{iz} - i}{(\cos z)^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i}{(\cos z)^2}$$

• $e^{iz} - i \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i - i = 0$

$(e^{iz} - i)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i e^{iz} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i^2 \neq 0$ $\Big\}$ jednonásobný kořen čitatele

• $\cos z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

$(\cos z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0$ $\Big\}$ jednonásobný kořen $\cos z \implies 2 \cdot 1 = 2$-násobný kořen jmenovatele

$\implies$ Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu $2-1=1$.

• $$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i}{(\cos z)^2} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{e^{iz} - i}{(\cos z)^2} \overset{\text{LH} \, \text{,,}\frac{0}{0}\text{''}}{=} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + i e^{iz}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}{-2\cos z \sin z} =$$

$$\overset{\text{LH} \, \text{,,}\frac{0}{0}\text{''}}{=} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{i e^{iz} - e^{iz}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + i e^{iz}}{2\sin^2 z - 2\cos^2 z} = \frac{i^2 - 0 + i^2}{2 - 0} = -1$$

• Tedy $I = 2\pi i(-1) = -2\pi i$.

4) a)

$$\cdot\ \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-5}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-5}^{1} = \frac{e^{-i\omega} - e^{5i\omega}}{-i\omega}$$

$$= \frac{e^{-i\omega} - e^{5i\omega}}{\omega}\, i \quad \text{pro } \omega \neq 0$$

$$\cdot\ \hat{f}(0) = \int_{-5}^{1} dt = 6$$

b) $\mathcal{F}\left[\left(t e^{-\frac{t^2}{4}}\right) * \left(e^{3it} h''(t)\right)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[t e^{-\frac{t^2}{4}}\right](\omega)\, \mathcal{F}\left[e^{3it} h''(t)\right](\omega)$

$$\cdot\ \mathcal{F}\left[t e^{-\frac{t^2}{4}}\right](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{4}}\right](\omega) = i\left(\sqrt{4\pi}\, e^{-\omega^2}\right)' = -2\omega i \sqrt{4\pi}\, e^{-\omega^2}$$

$$\cdot\ \mathcal{F}\left[e^{3it} h''(t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[h''(t)\right](\omega - 3) = \left(i(\omega-3)\right)^2 \hat{h}(\omega-3) = -(\omega-3)^2 \hat{h}(\omega-3)$$

$\cdot$ Tedy $\mathcal{F}\left[\left(t e^{-\frac{t^2}{4}}\right) * \left(e^{3it} h''(t)\right)\right](\omega) = \left(-2\omega i \sqrt{4\pi}\, e^{-\omega^2}\right) \cdot \left(-(\omega-3)^2 \hat{h}(\omega-3)\right)$

5) a)

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-(sY(s)-y(0))+3Y(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$s^2Y(s)-5s+2-sY(s)+5+3Y(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$(s^2-s+3)Y(s)=\frac{1}{s-2}+5s-7$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2-s+3)(s-2)}+\frac{5s-7}{s^2-s+3}$$

b)

$$y(t)=\operatorname*{res}_{s=-7}\frac{e^{st}}{(s+7)^2(s+2)}+\operatorname*{res}_{s=-2}\frac{e^{st}}{(s+7)^2(s+2)}$$

- $$\operatorname*{res}_{s=-2}\frac{e^{st}}{(s+7)^2(s+2)}=\frac{e^{-2t}}{5^2}=\frac{e^{-2t}}{25}$$

- $$\operatorname*{res}_{s=-7}\frac{e^{st}}{(s+7)^2(s+2)}=\lim_{s\to-7}\left((s+7)^2\frac{e^{st}}{(s+7)^2(s+2)}\right)'=\lim_{s\to-7}\left(\frac{e^{st}}{s+2}\right)'=\lim_{s\to-7}\frac{te^{st}(s+2)-e^{st}}{(s+2)^2}=$$

$$=\frac{-5t-1}{(-5)^2}e^{-7t}=-\frac{5t+1}{25}e^{-7t}$$

- Tedy $y(t)=-\frac{5t+1}{25}e^{-7t}+\frac{e^{-2t}}{25}$.