Písemná část (08.02.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{i^{16}}{(1+2i)^2}.$$

(b) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$3 - 7i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

(c) Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{5}{z-2} + \frac{4}{z+3} + \frac{3}{z+2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-2| = 3$.

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)z^{2n+4}}{3^n}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+5)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r = 10$ a vnější $R = \infty$. Konverguje tato řada v bodě $z = -5 + 8i$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+8x+17)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Najděte inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = z^2 \ln\left(1+\frac{2}{z^3}\right),\ \ z \in U(\infty),$$

a napište, čemu se rovná a_7 a $a_1 0$.

[Nápověda: Využijte známého rozvoje funkce $\ln z$.]

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) * \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n=0}^{\infty}.$$

[Nápověda: Využijte skutečnosti, že $\mathscr{Z}\left[\frac{(-1)^n}{n!}\right](z) = e^{-\frac{1}{z}}$.]

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'''(t) + 6y'(t) - y(t) = e^{-4t^2}.$$

(b) Určete řešení $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice, je-li Fourierův obraz řešení roven

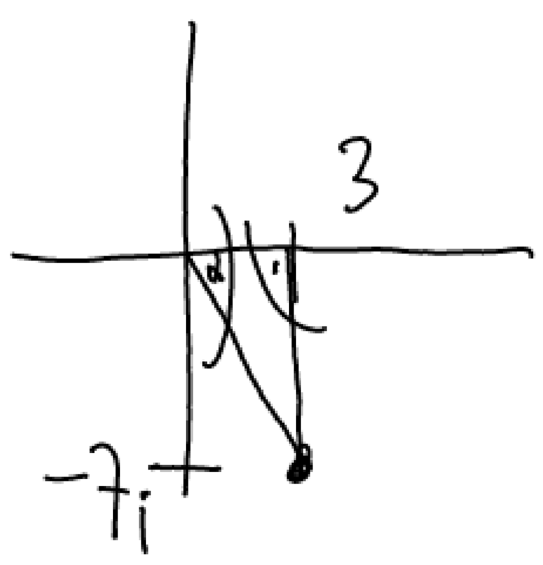
$$\hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega-3i)(\omega-2i)^2}.$$

$\boxed{8.2.2024}$

1) a) $z = \frac{1}{(1+2i)^2} = \frac{1}{1+4i-4} = \frac{1}{-3+4i} = \frac{-3-4i}{9+16} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

$\operatorname{Re} z = -\frac{3}{25}$ | $\operatorname{Im} z = -\frac{4}{25}$

b) $r = |3-7i| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

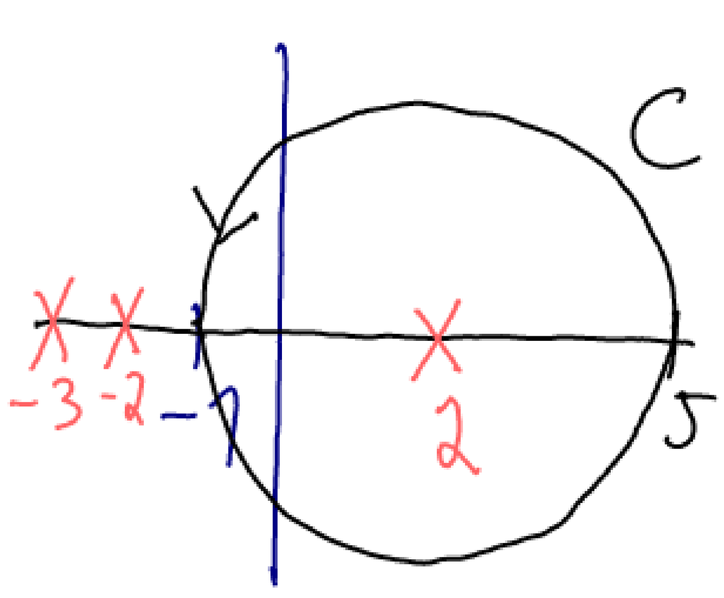


$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{3}$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{3}$

Např. $\varphi = -\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{7}{3}$.

c)



· Singularity -3 a -2 leží mimo C, dle Cauchyovy věty je $\int_C \frac{4}{z+3} + \frac{3}{z+2}\, dz = 0$.

· $I = \int_C \frac{5}{z-2}\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_2 \frac{5}{z-2} = 2\pi i \cdot 5 = 10\pi i$.

2) a)

$$\cdot f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{3^n} = \dots = z^2 \frac{9z^2(3+z^2) - 6z^4}{(3+z^2)^2} \quad \text{pro } |z| < \sqrt{3}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{3^n} :$$

Integrace $\longrightarrow$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3}}{3^n} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{3^n} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z^2}{3} \right)^n =$$

$$= z^3 \frac{1}{1 - \left(-\frac{z^2}{3}\right)} = \frac{z^3}{1 + \frac{z^2}{3}} = \frac{3z^3}{3+z^2} \quad \text{pro } \left| -\frac{z^2}{3} \right| < 1$$

$$|z|^2 < 3$$

$$|z| < \sqrt{3}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{3^n} = \left(\frac{3z^3}{3+z^2} \right)' = \frac{9z^2(3+z^2) - 6z^4}{(3+z^2)^2}$$

b) $10 < |-5+8i+5|$?

$|8i| = 8 < 10$ Nekonverguje.

3)

$$z^2+8z+17=0$$
$$(z+4)^2-16+17=0$$
$$(z+4)^2=-1$$
$$z+4=\pm i$$
$$z=-4\pm i$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x+4+i)^2(x+4-i)^2}=2\pi i \operatorname*{res}_{-4+i}\frac{z}{(z+4+i)^2(z+4-i)^2}$$

$$\cdot \operatorname*{res}_{-4+i}\frac{z}{(z+4+i)^2(z+4-i)^2}=\lim_{z\to-4+i}\left((z+4-i)^2\frac{z}{(z+4+i)^2(z+4-i)^2}\right)'=\lim_{z\to-4+i}\left(\frac{z}{(z+4+i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-4+i}\frac{(z+4+i)^2-2z(z+4+i)}{(z+4+i)^4}=\frac{2i-2(-4+i)}{(2i)^3}=\frac{8}{-8i}=-\frac{1}{i}$$

$$\Longrightarrow\quad I=2\pi i\left(-\frac{1}{i}\right)=-2\pi.$$

4) a)

$$F(z)=z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{z^3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{2^n}{z^{3n-2}}\quad \text{pro } \left|\frac{2}{z^3}\right|<1$$

$$|z|>\sqrt[3]{2}$$

- $F(z)=\frac{2}{z}-\frac{4}{2z^4}+\frac{8}{3z^7}-\frac{16}{4z^{10}}+\frac{32}{5z^{13}}-\dots$

$a_7=\frac{8}{3},\ a_{10}=-\frac{16}{4}=-4$

b) $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)*\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)=\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z)\cdot\mathcal{Z}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)$

- $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z)=\frac{z}{z^2+1}$

- $\mathcal{Z}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)=\mathcal{Z}[a_{n+1}](z)=z\,\mathcal{Z}[a_n](z)-z\underbrace{a_0}_{=1}=z\,e^{-\frac{1}{z}}-z$

$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}$

- Jedy $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)*\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)=\frac{z}{z^2+1}\cdot\left(z\,e^{-\frac{1}{z}}-z\right).$

5) a)

$$(i\omega)^3\hat{y}(\omega)+6i\omega\hat{y}(\omega)-\hat{y}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$(-i\omega^3+6i\omega-1)\hat{y}(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$\hat{y}(\omega)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2(i\omega^3-6i\omega+1)}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

b)

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{(\omega-3i)(\omega-2i)^2}\right](t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-3i)(\omega-2i)^2}\,d\omega$$

· $\underline{t\geq 0:}$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-3i)(\omega-2i)^2}\,d\omega=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=3i}\frac{e^{izt}}{(z-3i)(z-2i)^2}+\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{e^{izt}}{(z-3i)(z-2i)^2}\right)$$

$$\cdot\operatorname*{res}_{z=3i}\frac{e^{izt}}{(z-3i)(z-2i)^2}=\frac{e^{-3t}}{-1}$$

$$\cdot\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{e^{izt}}{(z-3i)(z-2i)^2}=\lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\frac{e^{izt}}{(z-3i)(z-2i)^2}\right)'=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{izt}}{z-3i}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{ite^{izt}(z-3i)-e^{izt}}{(z-3i)^2}=\frac{it(-i)-1}{-1}e^{-2t}=-(t-1)e^{-2t}$$

· Tedy $y(t)=\frac{i}{2\pi}2\pi i\left(-e^{-3t}-(t-1)e^{-2t}\right)=e^{-3t}+(t-1)e^{-2t}$ pro $t\geq 0$.

· $\underline{t<0:}$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-3i)(\omega-2i)^2}\,d\omega=-2\pi i\cdot 0=0$$

· Tedy $y(t)=0$ pro $t<0$.