Písemná část (12.01.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{3+i}{i^{16} - 2i^{13}}.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = (3-3i)e^{5-\pi i}.$$

(c) Určete koeficient $a \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-2)^k} + \frac{3}{z-2} + \sum_{n=-2}^{\infty} n(z-2)^{2n}, \; z \in P(2),$$

měla v bodě $z_0 = 2$ pól řádu 2.

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(2n+2)} z^{2n+4}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-2)^n$ má vnitřní poloměr konvergence $r = 3$ a vnější $R = 6$. Konverguje v bodě $z = 4$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_C \frac{\sin z}{e^z - 1} + \frac{\cos z}{\sin z - 1}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $2\pi + i$, $2\pi - i$, 3π.

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \mathbb{1}(t+6) - \mathbb{1}(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

[Nápověda: Transformaci počítejte z definice, integrál NEroztrhávejte.]

(b) Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[(\sin(4t)e^{-3t^2}) * (h''(t-5))\right](\omega)\,.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 3y'(t) + y(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-5(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 0$.

(b) Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, je-li Laplaceův obraz řešení roven

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s^2+2s-15)}.$$

$\boxed{12.\ 1.\ 2024}$

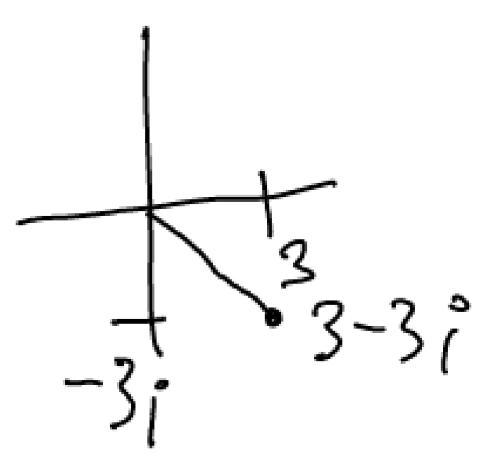
1) a) $\dfrac{3+i}{i^{16}-2i^{13}} = \dfrac{3+i}{1-2i} = \dfrac{3+i}{1-2i}\cdot\dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{3+i+6i-2}{1+4} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{5}$, $\operatorname{Im} z = \frac{7}{5}$

b) $|z| = |3-3i|\cdot|e^{5-\pi i}| = e^5\sqrt{18}$

$|3-3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

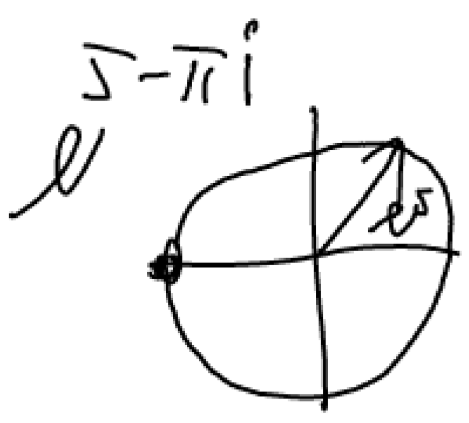
$|e^{5-\pi i}| = e^5$

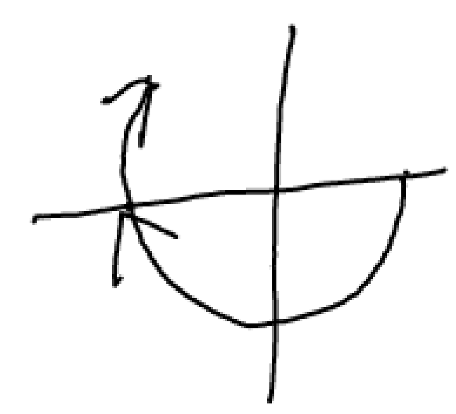


$-\frac{\pi}{4} = \arg(3-3i)$

$-\pi \in \operatorname{Arg}(e^{5-\pi i})$

$> -\frac{\pi}{4} - \pi \in \operatorname{Arg} z$





$\boxed{\text{2. kvadrant}}$

c) $g(z) = \dfrac{a}{(z-2)^k} + \dfrac{3}{z-2} + \dfrac{-2}{(z-2)^4} + \dfrac{-1}{(z-2)^2} + (z-2)^2 \underbrace{+\cdots}_{\text{nezáporné mocniny } (z-2)}, \quad z \in P(2)$

Zvolíme-li $k=4$ a $a=2$, pak $g(z) = -\dfrac{1}{(z-2)^2} + \dfrac{3}{z-2} + (z-2)^2 \underbrace{+\cdots}, \quad z \in P(2)$,
a g má tedy v bodě 2 pól řádu 2.

2) a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,(2n+2)} z^{2n+4} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,(2n+2)} z^{2n+2}$ (*)

$$\cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,(2n+2)} z^{2n+2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{2n}$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z^2)^n}{n!} = z e^{3z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\xRightarrow{\text{Integrace}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,(2n+2)} z^{2n+2} = \int z e^{3z^2}\, dz = \frac{1}{6} \int e^w\, dw \Big|_{w=3z^2} =$$

$w = 3z^2$
$dw = 6z\,dz$

$$= \frac{1}{6} e^w + C \Big|_{w=3z^2} = \frac{e^{3z^2}}{6} + C$$

$\underline{z=0:}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,(2n+2)} z^{2n+2} \Big|_{z=0} = 0, \text{ tedy } 0 = \frac{1}{6} + C \iff C = -\frac{1}{6}$$

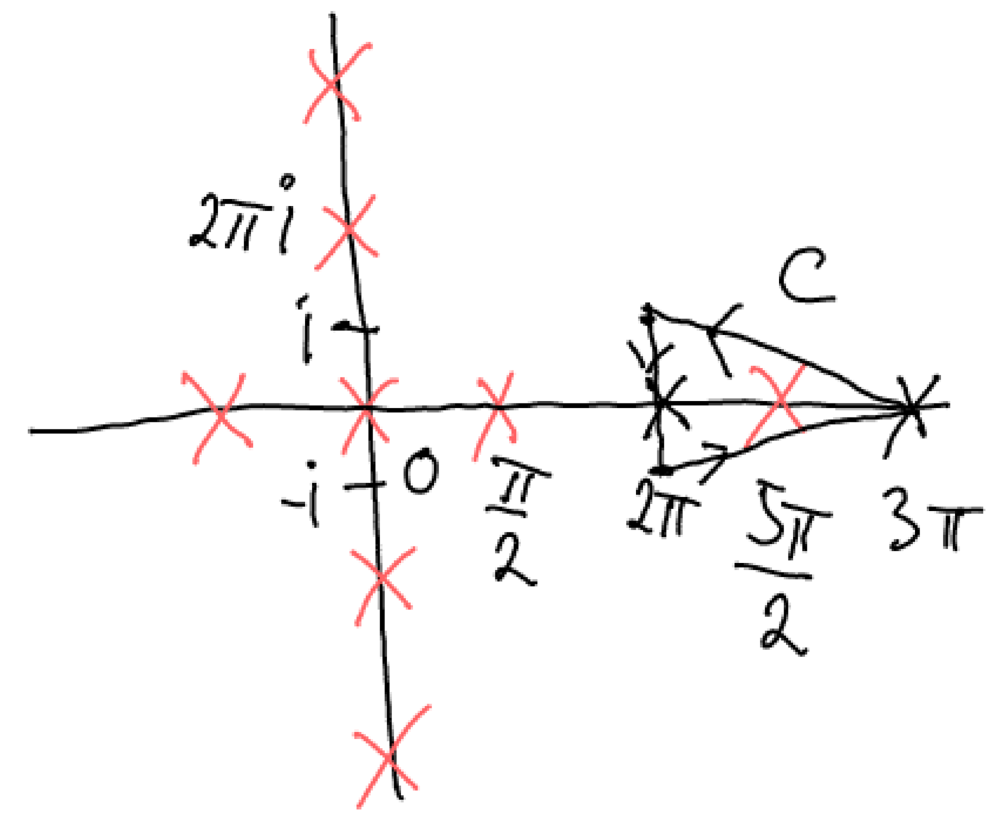
Takže $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,(2n+2)} z^{2n+2} = \frac{e^{3z^2}-1}{6}$, celkem tedy $f(z) \overset{(*)}{=} z^2 \dfrac{e^{3z^2}-1}{6} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

b) $3 < |4-2| < 6$? Jest $|4-2| = 2 < 3$, takže nekonverguje.

3) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{e^z-1} + \frac{\cos z}{\sin z - 1}\, dz =: I$

$e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin z = 1 \Longleftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$



· Všechny izolované singularity funkce $\frac{\sin z}{e^z-1}$ leží mimo C

$\Longrightarrow \displaystyle\int_C \frac{\sin z}{e^z-1}\,dz = 0$ dle Cauchyovo věty.

$$\Longrightarrow I = \int_C \frac{\cos z}{\sin z - 1}\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{reziduová věta}}}{=} 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sin z - 1}$$

· $\cos z \big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = 0$

· $(\cos z)'\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = -\sin z\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = -1 \neq 0$

· $\sin z - 1\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = 0$

· $(\sin z - 1)'\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = \cos z\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = 0$

· $(\sin z - 1)''\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = -\sin z\big|_{z=\frac{5\pi}{2}} = -1 \neq 0$

pól řádu $2-1=1$

$$\cdot \operatorname{res}_{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sin z - 1} = \lim_{z\to\frac{5\pi}{2}} \frac{(z-\frac{5\pi}{2})\cos z}{\sin z - 1} \overset{\text{LH},\,\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos z - (z-\frac{5\pi}{2})\sin z}{\cos z} \overset{\text{LH},\,\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

$$= \lim_{z\to\frac{5\pi}{2}} \frac{-\sin z - \sin z - (z-\frac{5\pi}{2})\cos z}{-\sin z} = \frac{-1-1-0}{-1} = 2$$

· Takže $I = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$.

4) a) $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-6}^{0} e^{-i\omega t}\, dt \overset{\omega \neq 0}{=} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-6}^{0}$

$= -\frac{1}{i\omega}\left(1 - e^{6i\omega}\right) = \frac{e^{6i\omega} - 1}{i\omega}$ pro $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\hat{f}(0) = \int_{-6}^{0} dt = 6$

b) $\mathcal{F}\left[\left(\sin(4t) \cdot e^{-3t^2}\right) * \left(h''(t-5)\right)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\sin(4t) e^{-3t^2}\right](\omega) \cdot \mathcal{F}\left[h''(t-5)\right](\omega)$

· $\mathcal{F}\left[\sin(4t) e^{-3t^2}\right](\omega) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\left[e^{4it} e^{-3t^2}\right](\omega) - \mathcal{F}\left[e^{-4it} e^{-3t^2}\right](\omega)\right) =$

$= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\left[e^{-3t^2}\right](\omega - 4) - \mathcal{F}\left[e^{-3t^2}\right](\omega + 4)\right) = \frac{1}{2i}\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{-\frac{(\omega-4)^2}{12}} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{-\frac{(\omega+4)^2}{12}}\right)$

· $\mathcal{F}\left[h''(t-5)\right](\omega) = e^{-5i\omega} \mathcal{F}\left[h''(t)\right](\omega) = e^{-5i\omega} (i\omega)^2 \hat{h}(\omega) = -\omega^2 e^{-5i\omega} \hat{h}(\omega)$

· Celkem tedy

$\mathcal{F}\left[\left(\sin(4t) \cdot e^{-3t^2}\right) * \left(h''(t-5)\right)\right](\omega) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(e^{-\frac{(\omega-4)^2}{12}} - e^{-\frac{(\omega+4)^2}{12}}\right)\left(-\omega^2 e^{-5i\omega} \hat{h}(\omega)\right)$

5) a) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = t^2 * e^{-5t}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\big(sY(s) - y(0)\big) + Y(s) = \frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{s+5}$$

$$s^2Y(s) + 2s - 3sY(s) - 6 + Y(s) = \frac{2}{s^3(s+5)}$$

$$(s^2 - 3s + 1)\,Y(s) = \frac{2}{s^3(s+5)} - 2s + 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+5)(s^2-3s+1)} - \frac{2s-6}{s^2-3s+1}$$

b) $s^2 + 2s - 15 = (s-3)(s+5)$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)^2(s+5)}$$

$$y(t) = \operatorname*{res}_{s=3} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+5)} + \operatorname*{res}_{s=-5} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+5)}$$

- $\displaystyle \operatorname*{res}_{s=-5} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+5)} = \frac{e^{-5t}}{(-8)^2} = \frac{e^{-5t}}{64}$

- $\displaystyle \operatorname*{res}_{s=3} \frac{e^{st}}{(s-3)^2(s+5)} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{s\to 3}\left(\frac{e^{st}}{s+5}\right)' = \lim_{s\to 3} \frac{te^{st}(s+5) - e^{st}}{(s+5)^2} =$

$$= \frac{8t-1}{64}\, e^{3t}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{e^{-5t}}{64} + \frac{8t-1}{64}\, e^{3t}$$