Písemná část (13.02.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím" téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2])**.**

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{-2 + i^{11}}{3 + 2i}.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = (-3 - 3i)e^{2 - \frac{\pi}{2}i}.$$

(c) Určete číslo $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{e^{zi} + a}{(z + i)(z - 3\pi)^5}$$

měla v bodě $z = 3\pi$ pól 4. řádu.

Úloha 2 ([10 bodů])**.**

(a) Mějme funkci

$$u(x, y) = x^3 y - xy^3 + 2xy, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá funkce. Určete $f'(1 + i)$.

(b) Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$g(z) = (\operatorname{Im} z)^2 + \alpha \operatorname{Re} z + 2iz\overline{z}, \ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná v bodě $1 - 2i$.

Úloha 3 ([12 bodů]). Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{(\cos z + 1)(z - 3\pi)}{(e^{iz} + 1)^3}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Nejprve zapište funkci

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{pokud } t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & \text{pokud } t \in [\frac{\pi}{2}, 5), \\ (t-5)^4, & \text{pokud } t \in [5, \infty), \end{cases}$$

pomocí Heavisideovy funkce a poté nalezněte její Laplaceovu transformaci.

(b) Nalezněte Laplaceův vzor $g(t)$ funkce

$$G(s) = \frac{e^{-8s}}{s^2 + 1}.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Z-transformaci $Y(z)$ řešení diferenční rovnice

$$2y_{n+2} - y_{n+1} + 5y_n = 1$$

s počátečními podmínkami $y_0 = -3$ a $y_1 = 2$.

(b) Určete řešení y_n diferenční rovnice, je-li Z-transformace řešení rovna

$$Y(z) = \frac{1}{(z+2)(z+5)^2}.$$

$\boxed{13.\ 2.\ 2024}$

1) a)

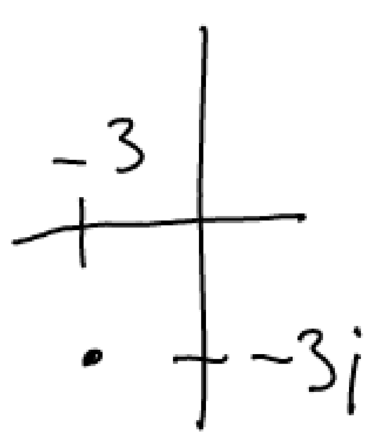
$$z = \frac{-2-i}{3+2i} = -\frac{2+i}{3+2i}\,\frac{3-2i}{3-2i} = -\frac{6-4i+3i+2}{9+4} = -\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$$

$\operatorname{Re} z = -\frac{8}{13}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{13}$

b)

$$|z| = |-3-3i|\,\left|e^{2-\frac{\pi}{2}i}\right| = \sqrt{18}\,e^{2}$$

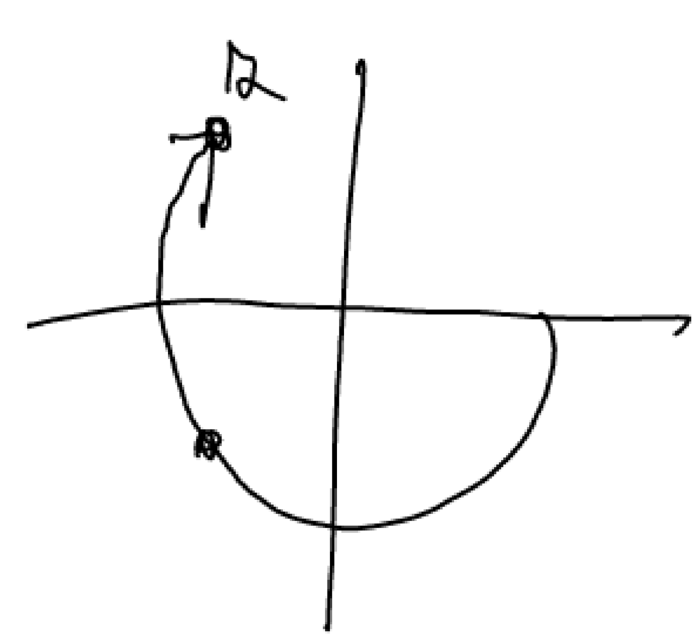
$$|-3-3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$



$-\frac{3\pi}{4} = \arg(-3-3i)$

$-\frac{\pi}{2} = \arg\left(e^{2-\frac{\pi}{2}i}\right)$

(např.) $-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4} \in \operatorname{Arg} z$



2. kvadrant

c) Bod 3π je zřejmě 5-násobný kořen jmenovatele.
Jest $e^{3\pi i} = e^{\pi i} = -1$. Zvolíme-li tedy $a = 1$, pak je bod 3π jednonásobný kořen čitatele, neboť
$(e^{iz}+1)'\big|_{z=3\pi} = ie^{iz}\big|_{z=3\pi} = -i \neq 0$, a tedy celkem pól řádu 4.

2) a)

- $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3 + 2y$

$\Longrightarrow v(x,y) = \int 3x^2y - y^3 + 2y \, dy = \frac{3x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + y^2 + C(x) \qquad (*)$

- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(x^3 - 3xy^2 + 2x\right) = -x^3 + 3xy^2 - 2x$

Zároveň díky $(*)$: $\frac{\partial v}{\partial x} = 3xy^2 + C'(x)$

- Tedy $3xy^2 + C'(x) = -x^3 + 3xy^2 - 2x$, takže $C'(x) = -x^3 - 2x$.

$\Longrightarrow C(x) = \int -x^3 - 2x \, dx = -\frac{x^4}{4} - x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$

- Tedy $v(x,y) = \frac{3x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + y^2 - \frac{x^4}{4} - x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

- $f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 3 - 1 + 2 + i(-1+3-2) = 4$

b) $z = x + iy$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$g(z) = y^2 + \alpha x + 2i(x^2 + y^2)$

$u(x,y) = y^2 + \alpha x$

$v(x,y) = 2x^2 + 2y^2$

- $\frac{\partial u}{\partial x}(1,-2) = \frac{\partial v}{\partial y}(1,-2)$?

$\alpha = 4y\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}}$

$\alpha = -8$

- $\frac{\partial u}{\partial y}(1,-2) = -\frac{\partial v}{\partial x}(1,-2)$?

$2y = -4x\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}}$

$-4 = -4$

$\boxed{\alpha = -8}$

3) $e^{iz}+1=0$

$e^{iz}=-1$

$iz=i\pi+2k\pi i$

$z=\pi+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$

- $\cos z+1\Big|_{z=\pi+2k\pi}=-1+1=0$
- $(\cos z+1)'\Big|_{z=\pi+2k\pi}=-\sin z\Big|_{z=\pi+2k\pi}=0$
- $(\cos z+1)''\Big|_{z=\pi+2k\pi}=-\cos z\Big|_{z=\pi+2k\pi}=1\neq 0$

2-násobné kořeny $\cos z+1$

- Bod 3π [$k=1$] je navíc jednonásobný kořen $(z-3\pi)$.
- Bod 3π je tedy $2+1=3$-násobný kořen čitatele, zatímco body $\pi+2k\pi$ pro $k\neq 1$ jsou 2-násobné kořeny čitatele.

- $e^{iz}+1\Big|_{\pi+2k\pi}=0$
- $(e^{iz}+1)'\Big|_{z=\pi+2k\pi}=ie^{iz}\Big|_{z=\pi+2k\pi}=-i\neq 0$

1-násobné kořeny $e^{iz}+1$

$\Longrightarrow$ $3\cdot 1=3$-násobné kořeny jmenovatele

Celkem jsou tedy body $z=\pi+2k\pi$

- odstranitelná singularita pro $k=1$ [tj. $z=3\pi$]
- póly řádu $3-2=1$ pro $k\neq 1$

4) a)

$$f(t) = (\cos t)\left(\eta(t) - \eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) + (t-5)^4 \eta(t-5)$$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[\cos t](s) - \mathcal{L}\left[(\cos t)\,\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right](s) + \mathcal{L}\left[(t-5)^4 \eta(t-5)\right](s)$$

- $\mathcal{L}[\cos t](s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

- $\mathcal{L}\left[(\cos t)\,\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right](s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\mathcal{L}[\underbrace{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}_{=-\sin t}](s) = -e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\mathcal{L}[\sin t](s) = -\dfrac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}$

- $\mathcal{L}\left[(t-5)^4\eta(t-5)\right](s) = e^{-5s}\,\mathcal{L}[t^4](s) = \dfrac{24}{s^5}e^{-5s}$

- Celkem $\mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s} + \dfrac{24}{s^5}e^{-5s}.$

b)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}e^{-8s}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1} \implies h(t) = \sin t$$

- $g(t) = h(t-8)\,\eta(t-8) = (\sin(t-8))\,\eta(t-8)$

5) a)

$$2\left(z^2Y(z)-z^2y_0-zy_1\right)-\left(zY(z)-zy_0\right)+5Y(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$2z^2Y(z)+6z^2-4z-zY(z)-3z+5Y(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$\left(2z^2-z+5\right)Y(z)=\frac{z}{z-1}-6z^2+7z$$

$$Y(z)=\frac{z}{(z-1)(2z^2-z+5)}-\frac{6z^2-7z}{2z^2-z+5}$$

b)

$$y_n=\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{z^{n-1}}{(z+2)(z+5)^2}+\operatorname*{res}_{z=-5}\frac{z^{n-1}}{(z+2)(z+5)^2} \quad \text{po } n\geq 1$$

$$\cdot \operatorname*{res}_{z=-2}\frac{z^{n-1}}{(z+2)(z+5)^2}=\frac{(-2)^{n-1}}{9}$$

$$\cdot \operatorname*{res}_{z=-5}\frac{z^{n-1}}{(z+2)(z+5)^2}=\lim_{z\to-5}\left(\frac{z^{n-1}}{z+2}\right)'=\lim_{z\to-5}\frac{(n-1)z^{n-2}(z+2)-z^{n-1}}{(z+2)^2}=$$

$$=\frac{-3(n-1)(-5)^{n-2}-(-5)^{n-1}}{9}$$

$$y_n=\frac{(-2)^{n-1}}{9}+\frac{-3(n-1)(-5)^{n-2}-(-5)^{n-1}}{9} \quad \text{po } n\geq 1$$