Písemná část (17.01.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2])**.**

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \frac{4 - i^{17}}{2 + i}.$$

(b) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$-3 - 2i = re^{i\varphi}.$$

(c) Určete $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_4 \left(5 + \frac{3}{(z-4)^2} + \frac{5}{z-4} + \frac{a}{(z-4)^k} \right) = 3.$$

Úloha 2 ([10 bodů])**.**

(a) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, aby funkce

$$u(x,y) = e^{2y}\sin(\alpha x) + \beta y^3 + 9x^2 y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

(b) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(z) = (z - \overline{z})^2 + 4\mathrm{Re}\,(z) + iz\overline{z}, \ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $z = 8 + 2i$. Pokud ano, určete $f'(8 + 2i)$.

Úloha 3 ([12 bodů]). Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{\sin z - 1}{(z - \frac{\pi}{2})(e^{iz} - i)^2}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Označme jako $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ inverzní Z-transformaci funkce

$$F(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^7}.$$

Určete, čemu se rovná a_{11} a a_{14}.

[Nápověda: Rozviňte $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí ∞.]

(b) Pomocí Z-transformace posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ vyjádřete

$$\mathscr{Z}\left[(ni^n) * b_{n+2}\right](z)\,,$$

víte-li, že $b_0 = 0$ a $b_1 = 1$.

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'''(t) - 3y'(t) + y(t) = e^{-2t^2}.$$

(b) Určete řešení $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice, je-li Fourierův obraz řešení roven

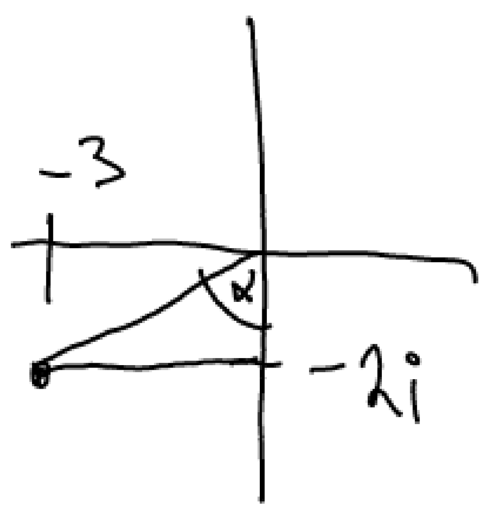
$$\hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega + 5i)^2(\omega - 2i)}.$$

$\boxed{17.\ 1.\ 2024}$

1) a) $z=\frac{4-i}{2+i}=\frac{4-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{8-2i-4i-1}{4+1}=\frac{7}{5}-\frac{6}{5}i$

$\operatorname{Re} z=\frac{7}{5}$, $\operatorname{Im} z=-\frac{6}{5}$

b) $r=|-3-2i|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$



$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ (Např.) $\varphi=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$

c) Zvolíme-li $k=1$, pak $\operatorname{res}_4\left(5+\frac{3}{(z-4)^2}+\frac{5}{z-4}+\frac{a}{z-4}\right)=5+a$, takže $5+a=3$, tj. $a=-2$.

2) a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$?

$$\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha e^{2y}\cos(\alpha x) + 18xy\right) = -\alpha^2 e^{2y}\sin(\alpha x) + 18y$$

$$\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2e^{2y}\sin(\alpha x) + 3\beta y^2 + 9x^2\right) = 4e^{2y}\sin(\alpha x) + 6\beta y$$

$$-\alpha^2 e^{2y}\sin(\alpha x) + 18y + 4e^{2y}\sin(\alpha x) + 6\beta y = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$(4-\alpha^2)e^{2y}\underbrace{\sin(\alpha x)}_{\alpha=0} + (18+6\beta)y = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$\alpha^2 = 4$ $\quad$ $6\beta = -18$

$\alpha = \pm 2$ $\quad$ $\beta = -3$

$$\boxed{\alpha \in \{-2, 0, 2\} \ \& \ \beta = -3}$$

b) $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$z - \bar{z} = 2iy$, $z\bar{z} = x^2 + y^2$

$f(z) = -4y^2 + 4x + i(x^2+y^2)$

$u(x,y) = 4x - 4y^2$

$v(x,y) = x^2 + y^2$

CR1) $\frac{\partial u}{\partial x}(8,2) = \frac{\partial v}{\partial y}(8,2)$?

$4 = 2y \Big|_{x=8,y=2}$

$4 = 4$

✓

CR2) $\frac{\partial u}{\partial y}(8,2) = -\frac{\partial v}{\partial x}(8,2)$?

$-8y = -2x \Big|_{x=8,y=2}$

$-16 = -16$

✓

· Funkce $f(z)$ je v bodě $8+2i$ diferencovatelná

a platí $f'(8+2i) = \frac{\partial u}{\partial x}(8,2) + i\frac{\partial v}{\partial x}(8,2) = 4 + 2xi\Big|_{x=8,y=2} = 4 + 16i.$

3) $e^{iz} = i \iff iz = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i$

$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$

- Izolované singularity funkce $f(z)$ jsou tedy body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

- $\sin z - 1\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 1-1=0$

$(\sin z - 1)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = \cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0$

$(\sin z - 1)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -\sin z = -1 \neq 0$

Body $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ jsou 2-násobné kořeny čitatele.

- $e^{iz} - 1\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0$

$(e^{iz}-1)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = ie^{iz}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = i^2 \neq 0$

$\Longrightarrow$ jednoduché kořeny $e^{iz}-1 \Rightarrow 2\cdot 1 = 2$-násobné kořeny $(e^{iz}-1)^2$

- Pro $k \neq 0$ [tj. $z \neq \frac{\pi}{2}$] se tedy jedná o 2-násobné kořeny jmenovatele. Jsou to tedy odstranitelné singularity.

- Bod $z = \frac{\pi}{2}$ (tj. $k=0$) je $1+2=3$-násobný kořen jmenovatele. Je to tedy pól řádu $3-2=1$.

Celkem: Body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou
- odstranitelné singularity ... $k \neq 0$
- pól řádu 1 ... $k=0$.

4) a) $F(z) = \frac{1}{2z^7} \frac{1}{1+\frac{1}{2z^4}} = \frac{1}{2z^7} \frac{1}{1-(-\frac{1}{2z^4})} = \frac{1}{2z^7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2z^4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{z^{4n+7}}$

$= \frac{1}{2z^7} - \frac{1}{4z^{11}} + \frac{1}{8z^{15}} + \dots$ pro $\left|-\frac{1}{2z^4}\right| < 1$

$|z|^4 > \frac{1}{2}$

$|z| > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Tedy $a_{11} = -\frac{1}{4}$, $a_{14} = 0$.

b) $\mathcal{Z}[(n i^n) * b_{n+2}](z) = \mathcal{Z}[n i^n](z) \cdot \mathcal{Z}[b_{n+2}](z)$

· $\mathcal{Z}[n i^n](z) = -z \frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}[i^n](z)\right) = -z \left(\frac{z}{z-i}\right)' = -z \frac{z-i-z}{(z-i)^2}$

$= \frac{zi}{(z-i)^2}$

· $\mathcal{Z}[b_{n+2}](z) = z^2 F(z) - z^2 b_0 - z b_1 = z^2 F(z) - z$, kde $F(z) = \mathcal{Z}[b_n](z)$.

Tedy $\mathcal{Z}[(n i^n) * b_{n+2}](z) = \frac{zi}{(z-i)^2}\left(z^2 F(z) - z\right)$.

5) a) $(iw)^3\hat{y}(w) - 3iw\hat{y}(w) + \hat{y}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{w^2}{8}}$

$$\left(-iw^3 - 3iw + 1\right)\hat{y}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{w^2}{8}}$$

$$\hat{y}(w) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-\frac{w^2}{8}}}{iw^3 + 3iw - 1}$$

b) $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{(w+5i)^2(w-2i)}\right](t) = \frac{i}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{(w+5i)^2(w-2i)}\,dw}_{I}$

Pro $t \geq 0$:

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2i} \frac{e^{izt}}{(z+5i)^2(z-2i)} = 2\pi i \frac{e^{-2t}}{(7i)^2} = -2\pi i \frac{e^{-2t}}{49}.$$

Tedy $y(t) = \frac{i}{2\pi} I = \frac{e^{-2t}}{49}$ pro $t \geq 0$.

Pro $t < 0$:

$$I = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=-5i} \frac{e^{izt}}{(z+5i)^2(z-2i)} = \cdots = 2\pi i \frac{7t-1}{49} e^{5t}$$

$$\cdot \operatorname*{res}_{z=-5i} \frac{e^{izt}}{(z+5i)^2(z-2i)} = \lim_{z\to -5i}\left((z+5i)^2 \frac{e^{izt}}{(z+5i)^2(z-2i)}\right)' = \lim_{z\to -5i}\left(\frac{e^{izt}}{z-2i}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -5i} \frac{it e^{izt}(z-2i) - e^{izt}}{(z-2i)^2} = \frac{7t-1}{-49} e^{5t}$$

Tedy $y(t) = \frac{i}{2\pi} I = -\frac{7t-1}{49} e^{5t}$ pro $t < 0$.