Písemná část (23.01.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Nalezněte všechna řešení rovnice

$$z^2 - 8z + 20 = 0.$$

(b) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$-5 + 2i = re^{i\varphi}.$$

(c) Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{4}{z+i} + \frac{3}{z-i} + \frac{2}{(z-i)^3}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - i| = 1$.

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{(z-4)^3}{(z-6)^2}$$

do mocninné řady na maximálním okolí bodu $z_0 = 4$ a určete parametry tohoto okolí.

(b) Laurentova řada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+2)^n$ má vnitřní poloměr konvergence $r = 0$ a vnější $R = 2$. Konverguje v bodě $z = -3$?

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 6x + 10)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce $f(t)$ s periodou $T = 4$, která je na intervalu $[0, 4)$ dána předpisem

$$f(t) = (t-2)^2 \big(\mathbb{1}(t-2) - \mathbb{1}(t-3)\big), \ t \in [0, 4).$$

(b) Pomocí Laplaceova obrazu $G(s)$ „pěkné“ funkce $g(t) \in L_0$ splňující $g(0) = -1$ a $g'(0) = 2$ vyjádřete

$$\mathscr{L}\left[(te^{-5t}) * g''(t)\right](s)\,.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Z-transformaci $Y(z)$ řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1$$

s počátečními podmínkami $y_0 = -2$ a $y_1 = 0$.

(b) Určete řešení y_n diferenční rovnice, je-li Z-transformace řešení rovna

$$Y(z) = \frac{z + 3i}{(z^2 + 9)^2}.$$

$\boxed{23.\ 1.\ 2024}$

1) a) $z^2-8z+20=0$

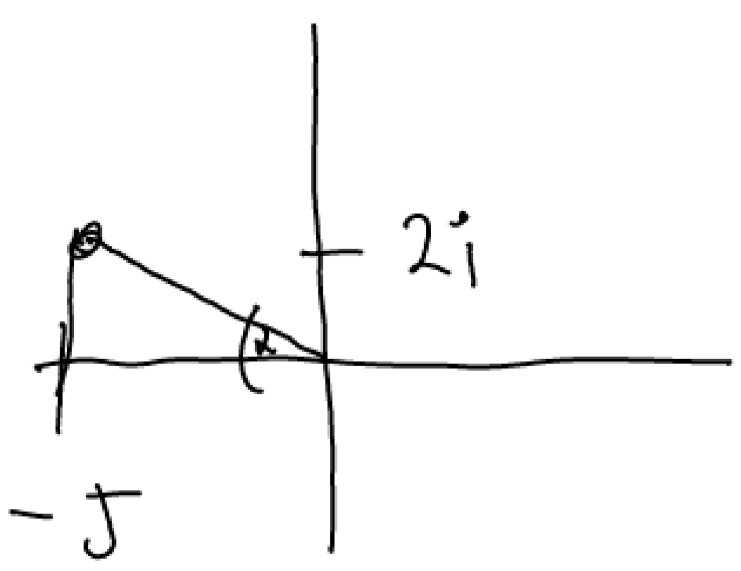
$(z-4)^2-16+20=0$

$(z-4)^2=-4$

$z-4=\pm 2i$

$z=4\pm 2i$

b) $r=|-5+2i|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$



$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$

(Např.) $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$

c)

$$\int_C \frac{4}{z+i}\,dz=0$$

$$\int_C \frac{4}{z+i}+\frac{3}{z-i}+\frac{2}{(z-i)^3}\,dz=\int_C \frac{3}{z-i}+\frac{2}{(z-i)^3}\,dz=2\pi i\,\underbrace{\operatorname{res}_i\left(\frac{3}{z-i}+\frac{2}{(z-i)^3}\right)}_{=3}=6\pi i.$$

2) a) $f(z)=(z-4)^3\dfrac{1}{(z-6)^2}$

- $\dfrac{1}{z-6}=\dfrac{1}{(z-4)-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z-4}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-4)^n}{2^n}$

- $\left(\dfrac{1}{z-6}\right)'=-\dfrac{1}{(z-6)^2}$

Jedy $\dfrac{1}{(z-6)^2}=-\left(-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-4)^n}{2^n}\right)'=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(z-4)^{n-1}}{2^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}(z-4)^{n-1}.$

- Takže $f(z)=(z-4)^3\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}(z-4)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}(z-4)^{n+2}$

pro $\left|\dfrac{z-4}{2}\right|<1$

$|z-4|<2$

b) $0<|-3+2|<2$?

$|-3+2|=1$

Ano, konverguje.

3) $z^2-6z+10=0$

$(z-3)^2-9+10=0$

$(z-3)^2=-1$

$z-3=\pm i$

$z=3\pm i$

$$I:=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x-3-i)^2(x-3+i)^2}\,dx=2\pi i\,\operatorname{res}_{3+i}\frac{z}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2}$$

$$\cdot\operatorname{res}_{3+i}\frac{z}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2}=\lim_{z\to 3+i}\left((z-3-i)^2\frac{z}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2}\right)'=\lim_{z\to 3+i}\left(\frac{z}{(z-3+i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 3+i}\frac{(z-3+i)^2-2(z-3+i)z}{(z-3+i)^4}=\frac{-4-4i(3+i)}{16}=-\frac{12}{16}i=-\frac{3}{4}i$$

Takže $I=2\pi i\left(-\frac{3}{4}i\right)=\frac{3}{2}\pi.$

4) a) $\mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{\mathcal{L}[f(t)(1(t)-1(t-4))](s)}{1-e^{-4s}}$

$\cdot\ \mathcal{L}[f(t)(1(t)-1(t-4))](s) = \mathcal{L}[(t-2)^2(1(t-2)-1(t-3))](s)$

$\mathcal{L}[(t-2)^2 1(t-2)](s) = e^{-2s}\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2}{s^3}e^{-2s}$

$\mathcal{L}[(t-2)^2 1(t-3)](s) = e^{-3s}\mathcal{L}[(t+1)^2](s) = e^{-3s}(\mathcal{L}[t^2](s) + 2\mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[1](s))$

$= e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$

Tedy $\mathcal{L}[(t-2)^2(1(t-2)-1(t-3))](s) = \frac{2}{s^3}e^{-2s} - \left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-3s}$,

Takže $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-4s}}\left(\frac{2}{s^3}e^{-2s} - \left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-3s}\right)$.

b) $\mathcal{L}[(te^{-5t}) * g''(t)](s) = \mathcal{L}[te^{-5t}](s)\,\mathcal{L}[g''(t)](s)$

$\cdot\ \mathcal{L}[te^{-5t}](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-5t}](s) = -\left(\frac{1}{s+5}\right)' = \frac{1}{(s+5)^2}$

$\cdot\ \mathcal{L}[g''(t)](s) = s^2G(s) - sg(0) - g'(0) = s^2G(s) + s - 2$

Takže $\mathcal{L}[(te^{-5t}) * g''(t)](s) = \frac{1}{(s+5)^2}\,(s^2G(s) + s - 2)$.

5) a) $z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 - 3(zY(z) - z y_0) + 2Y(z) = \frac{z}{z-1}$

$z^2 Y(z) + 2z^2 - 3zY(z) - 6z + 2Y(z) = \frac{z}{z-1}$

$(z^2 - 3z + 2) Y(z) = \frac{z}{z-1} - 2z^2 + 6z$

$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2-3z+2)} - \frac{2z^2-6z}{z^2-3z+2}$

b) $z^2 + 9 = 0$

$z = \pm 3i$

$Y(z) = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)^2}$

$\cdot\ y_n = \operatorname{res}_{z=-3i} \frac{z^{n-1}}{(z+3i)(z-3i)^2} + \operatorname{res}_{z=3i} \frac{z^{n-1}}{(z+3i)(z-3i)^2}$ dla $n \geq 1$

$\cdot\ \operatorname{res}_{z=-3i} \frac{z^{n-1}}{(z+3i)(z-3i)^2} = \frac{(-3i)^{n-1}}{(-6i)^2} = -\frac{(-3i)^{n-1}}{36}$

$\cdot\ \operatorname{res}_{z=3i} \frac{z^{n-1}}{(z+3i)(z-3i)^2} = \lim_{z\to 3i}\left((z-3i)^2 \frac{z^{n-1}}{(z+3i)(z-3i)^2}\right)' = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{z^{n-1}}{z+3i}\right)' =$

$= \lim_{z\to 3i} \frac{(n-1)z^{n-2}(z+3i) - z^{n-1}}{(z+3i)^2} = \frac{(n-1)\,6i\,(3i)^{n-2} - (3i)^{n-1}}{-36}$

Zatem $y_n = -\frac{(-3i)^{n-1}}{36} - \frac{(n-1)\,6i\,(3i)^{n-2} - (3i)^{n-1}}{36}$ dla $n \geq 1$.