Písemná část (25.01.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „kouknu a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2]).

(a) Nalezněte všechna řešení rovnice

$$z^2 + 10z + 50 = 0.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = 9\Big(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\Big)^{16}.$$

(c) Určete koeficient $a \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_{-1}\left(\frac{3}{z+1} + \frac{a}{(z+1)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (z+1)^{3n-5}\right) = 5.$$

Úloha 2 ([10 bodů]).

(a) Mějme funkci

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y + 4x,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá funkce. Určete $f'(-2i)$.

(b) Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \alpha(\operatorname{Im} z)^2 - 4\operatorname{Re} z + iz\overline{z},\ \ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná v bodě $1 - 2i$.

Úloha 3 ([12 bodů]). Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{z(\sin z - \cos z + 1)}{(\cos z - 1)^2}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Najděte inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = \frac{1}{z^2} \cos\left(\frac{4}{z^3}\right), \; z \in U(\infty),$$

a napište, čemu se rovná a_3 a a_8.

[Nápověda: Využijte známého rozvoje funkce $\cos z$.]

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\frac{1}{(n+2)!} * (-1)^n\right)_{n=0}^{\infty}.$$

[Nápověda: Využijte skutečnosti, že $\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z) = e^{\frac{1}{z}}$.]

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 3y'(t) = \cos(2t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1$ a $y'(0) = 3$.

(b) Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, je-li Laplaceův obraz řešení roven

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s+2)^2}.$$

25. 1. 2024

1) a) $z^2+10z+50=0$

$(z+5)^2-25+50=0$

$(z+5)^2=-25$

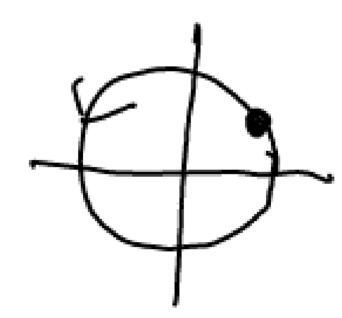
$z+5=\pm 5i$

$z=-5\pm 5i$

b) $z=9\left(\cos\left(\frac{16\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{16\pi}{7}\right)\right)$

$|z|=9$

$\frac{16\pi}{7}\in \operatorname{Arg} z$ $\qquad \frac{16\pi}{7}=2\pi+\frac{2\pi}{7}$



1. kvadrant

c) Zvolíme-li $k=1$, pak

$$\operatorname{res}_{-1}\left(\frac{3}{z+1}+\frac{a}{(z+1)}+\frac{1}{(z+1)^2}+4(z+1)+\cdots\right)=3+a.$$

Takže $3+a=5$

$a=2$

2) a)

- $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy + 4$

$\Longrightarrow v(x,y) = \int -6xy + 4\,dy = -3xy^2 + 4y + C(x)$

- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(3y^2 - 3x^2) = -3y^2 + 3x^2$

Zároveň $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-3xy^2 + 4y + C(x)\right) = -3y^2 + C'(x)$

- Tedy $-3y^2 + 3x^2 = -3y^2 + C'(x)$, takže $C'(x) = 3x^2$

$\Longrightarrow C(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

- Celkem $v(x,y) = -3xy^2 + 4y + x^3 + K$

$f'(-2i) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,-2) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,-2) = -6xy + 4 + i(-3y^2 + 3x^2)\Big|_{x=0,\,y=-2} = 4 - 12i$

b) $z = x + iy$

$g(z) = \alpha y^2 - 4x + i(x^2 + y^2)$

$u(x,y) = \alpha y^2 - 4x$

$v(x,y) = x^2 + y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x}(1,-2) = \frac{\partial v}{\partial y}(1,-2)$

$-4 = 2y\Big|_{y=-2}$

$-4 = -4$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial y}(1,-2) = -\frac{\partial v}{\partial x}(1,-2)$

$2\alpha y = -2x\Big|_{x=1,\,y=-2}$

$-4\alpha = -2$

$\alpha = \frac{1}{2}$

3) $\cos z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$

- $\sin z - \cos z + 1 \Big|_{z=2k\pi} = 0 - 1 + 1 = 0$

$(\sin z - \cos z + 1)' \Big|_{z=2k\pi} = \cos z + \sin z \Big|_{z=2k\pi} = 1 + 0 \neq 0$

- Bod $z = 0$ (tj. $k=0$) je tedy $1+1=2$-násobný kořen čitatele, zatímco body $z = 2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou 1-násobné kořeny čitatele.

- $\cos z - 1 \Big|_{z=2k\pi} = 0$

$(\cos z - 1)' \Big|_{z=2k\pi} = -\sin z \Big|_{z=2k\pi} = 0$

$(\cos z - 1)'' \Big|_{z=2k\pi} = -\cos z \Big|_{z=2k\pi} = -1 \neq 0$

- Body $z = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou tedy 2-násobné kořeny faktoru $\cos z - 1$, a tedy $2 \cdot 2 = 4$-násobné kořeny jmenovatele.

- Celkem tedy jsou body $z = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, póly řádu

$4-2=2 \ldots k=0$

$4-1=3 \ldots k \neq 0$

4) a)

- $$\cos\left(\frac{4}{z^3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{4}{z^3}\right)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,16^n}{(2n)!\,z^{6n}}\qquad\forall z\neq 0$$

- $$F(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,16^n}{(2n)!\,z^{6n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,16^n}{(2n)!\,z^{6n+2}}=\frac{1}{z^2}-\frac{16}{2z^8}+\dots$$

$$a_3=0,\ a_8=-8$$

b) $$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(n+2)!}*(-1)^n\right](z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(n+2)!}\right](z)\,\mathcal{Z}\left[(-1)^n\right](z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(n+2)!}\right](z)\,\frac{z}{z+1}$$

- $$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(n+2)!}\right](z)=\mathcal{Z}\left[b_{n+2}\right](z)=z^2\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z)-z^2b_0-zb_1=z^2e^{\frac{1}{z}}-z^2-z$$
$$b_n=\frac{1}{n!}$$

- Tedy $$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(n+2)!}*(-1)^n\right](z)=\left(z^2e^{\frac{1}{z}}-z^2-z\right)\frac{z}{z+1}.$$

5) a)

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3\left(sY(s)-y(0)\right)=\frac{s}{s^2+4}$$

$$s^2Y(s)+s-3-3sY(s)-3=\frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2-3s)Y(s)=\frac{s}{s^2+4}-s+6$$

$$Y(s)=\frac{s}{(s^2+4)(s^2-3s)}-\frac{s-6}{s^2-3s}$$

b) $$y(t)=\operatorname{res}_{s=3}\frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}+\operatorname{res}_{s=-2}\frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}$$

- $$\operatorname{res}_{s=3}\frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}=\frac{e^{3t}}{25}$$
- $$\operatorname{res}_{s=-2}\frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}=\lim_{s\to-2}\left((s+2)^2\frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}\right)'=\lim_{s\to-2}\left(\frac{e^{st}}{s-3}\right)'=$$
$$=\lim_{s\to-2}\frac{te^{st}(s-3)-e^{st}}{(s-3)^2}=\frac{-5t-1}{25}e^{-2t}$$

- Tedy $$y(t)=\frac{e^{3t}}{25}-\frac{5t+1}{25}e^{-2t}.$$