Písemná část (31.01.2024)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Úloha 1 nevyžaduje žádné dlouhé či složité výpočty (ani nejsou žádané). Podúlohu 1(c) byste měli řešit metodou „koukni a vidím“ téměř okamžitě. Pokud nevíte, netravte s ní zbytečně čas. Celkově byste nad první úlohou neměli strávit více než pár jednotek minut (ideálně max. 5 minut, určitě ne více než 8 minut).
- **Podúlohy na sebe NEnavazují.**
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([6 bodů, 2 + 2 + 2])**.**

(a) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = 2i^{21} + \frac{(2-i)^2}{i^6}.$$

(b) Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo

$$z = (-2+2i)^7.$$

(c) Určete číslo $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{e^{zi} + a}{z^3(z + \frac{\pi}{2})^2}$$

měla v bodě $z = -\frac{\pi}{2}$ pól 1. řádu.

Úloha 2 ([10 bodů])**.**

(a) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, aby funkce

$$u(x,y) = e^{\alpha x} \cos y - x^4 + \beta x^2 y^2 - y^4,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

(b) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(z) = z\overline{z} + 2i(\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z),\ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $z = 1 - i$. Pokud ano, určete $f'(1-i)$.

Úloha 3 ([12 bodů]). Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4 ([10 bodů]).

(a) Nejprve zapište funkci

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } t \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ \sin(t - \frac{3\pi}{4}), & \text{pokud } t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \\ e^{-2t}, & \text{pokud } t \in [\frac{3\pi}{4}, \infty), \end{cases}$$

pomocí Heavisideovy funkce a poté nalezněte její Laplaceovu transformaci.

(b) Nalezněte Laplaceův vzor $g(t)$ funkce

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{s-3}.$$

Úloha 5 ([12 bodů, 6 + 6]).

(a) Určete Z-transformaci $Y(z)$ řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 3^n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 5$ a $y_1 = -2$.

(b) Určete řešení y_n diferenční rovnice, je-li Z-transformace řešení rovna

$$Y(z) = \frac{1}{(z-3)(z+1)^2}.$$

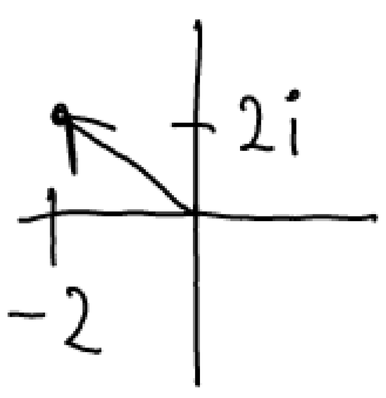
31. 1. 2024

1) a) $z = 2i + \frac{4-4i-1}{-1} = 2i - 3 + 4i = -3 + 6i$

$\operatorname{Re} z = -3, \ \operatorname{Im} z = 6$

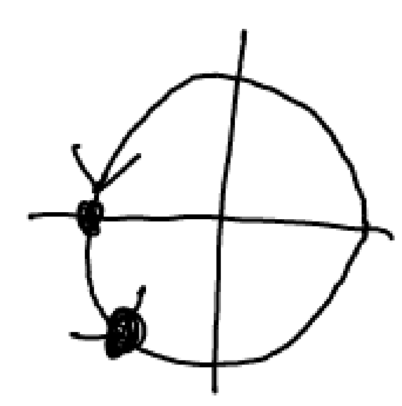
b) $|z| = |-2+2i|^7 = (\sqrt{8})^7$

$|-2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$



$\arg(-2+2i) = \frac{3\pi}{4} \implies 7 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{21\pi}{4} \in \operatorname{Arg}\left((-2+2i)^7\right)$

$\frac{21\pi}{4} = 5\pi + \frac{\pi}{4}$



3. kvadrant

c) Bod $z = -\frac{\pi}{2}$ je zřejmě 2-násobný kořen jmenovatele.
Jest $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$, takže zvolíme-li $a = i$, pak je bod $z = -\frac{\pi}{2}$ také kořen čitatele, a to 1-násobný, neboť $\left(e^{zi}\right)'\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}} = i(-i) \neq 0$. Celkem tedy pól řádu 1.

2) a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\alpha e^{\alpha x}\cos y - 4x^3 + 2\beta x y^2\right) = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y - 12x^2 + 2\beta y^2$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-e^{\alpha x}\sin y + 2\beta x^2 y - 4y^3\right) = -e^{\alpha x}\cos y + 2\beta x^2 - 12y^2$

$\alpha^2 e^{\alpha x}\cos y - 12x^2 + 2\beta y^2 - e^{\alpha x}\cos y + 2\beta x^2 - 12y^2 = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}?$

$\underbrace{(\alpha^2 - 1)}\, e^{\alpha x}\cos y + \underbrace{(2\beta - 12)}\, x^2 + \underbrace{(2\beta - 12)}\, y^2 = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}?$

$\alpha^2 = 1$

$\alpha = \pm 1$

$2\beta - 12 = 0$

$\beta = 6$

$$\boxed{\alpha \in \{-1, 1\} \;\&\; \beta = 6}$$

b) $z = x + iy$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$f(z) = x^2 + y^2 + 2i(y + x)$

$u(x,y) = x^2 + y^2$

$v(x,y) = 2x + 2y$

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,-1) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,-1)\,?$

$2x = 2 \Big|_{x=1,\, y=-1}$

$2 = 2$

✓

- $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,-1) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(1,-1)\,?$

$2y = -2 \Big|_{x=1,\, y=-1}$

$-2 = -2$

✓

Ano, funkce $f(z)$ je diferencovatelná v bodě $z = 1 - i$

a platí $f'(1-i) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 2x + 2i\Big|_{x=1,\, y=-1} = 2 + 2i.$

3) $z^2+4z+5=0$

$(z+2)^2-4+5=0$

$(z+2)^2=-1$

$z+2=\pm i$

$z=-2\pm i$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2ix}}{(x+2+i)^2(x+2-i)^2}\,dx \underset{\ulcorner\alpha=-2<0}{=} -2\pi i \operatorname{res}_{z=-2-i}\frac{e^{-2iz}}{(z+2+i)^2(z+2-i)^2}$$

$$\cdot \operatorname{res}_{z=-2-i}\frac{e^{-2iz}}{(z+2+i)^2(z+2-i)^2}=\lim_{z\to-2-i}\left((z+2+i)^2\frac{e^{-2iz}}{(z+2+i)^2(z+2-i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-2-i}\left(\frac{e^{-2iz}}{(z+2-i)^2}\right)'=\lim_{z\to-2-i}\frac{-2ie^{-2iz}(z+2-i)^2-2(z+2-i)e^{-2iz}}{(z+2-i)^4}=$$

$$=\frac{-2i(-2i)-2}{(-2i)^3}e^{-2i(-2-i)}=-\frac{6}{8i}e^{-2+4i}$$

Tedy $I=-2\pi i\left(-\frac{3}{4i}e^{-2+4i}\right)=\frac{3}{2}e^{-2+4i}\pi.$

4) a)

- $f(t) = \sin\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)\left(\mathbb{1}\left(t-\frac{\pi}{4}\right) - \mathbb{1}\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)\right) + e^{-2t}\,\mathbb{1}\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)$
- $$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}\left[\sin\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\mathbb{1}\left(t-\tfrac{\pi}{4}\right)\right](s) - \mathcal{L}\left[\sin\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\mathbb{1}\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-2t}\,\mathbb{1}\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right](s)$$
- $$\mathcal{L}\left[\sin\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\mathbb{1}\left(t-\tfrac{\pi}{4}\right)\right](s) = e^{-\frac{\pi}{4}s}\,\mathcal{L}\left[\overbrace{\sin\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)}^{=-\cos t}\right](s) =$$

$\ulcorner t+\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4} = t-\frac{\pi}{2} \lrcorner$

$$= -e^{-\frac{\pi}{4}s}\,\mathcal{L}[\cos t](s) = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{4}s}$$

- $$\mathcal{L}\left[\sin\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\mathbb{1}\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right](s) = e^{-\frac{3\pi}{4}s}\,\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{3\pi}{4}s}$$
- $$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\,\mathbb{1}\left(t-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right](s) = e^{-\frac{3\pi}{4}s}\,\mathcal{L}\left[e^{-2\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)}\right](s) = e^{-\frac{3\pi}{4}s}\,e^{-\frac{3\pi}{2}}\,\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right](s) =$$
$$= \frac{1}{s+2}e^{-\frac{3\pi}{4}s-\frac{3\pi}{2}}$$

- Tedy $\mathcal{L}[f(t)](s) = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{4}s} - \frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{3\pi}{4}s} + \frac{1}{s+2}e^{-\frac{3\pi}{4}s-\frac{3\pi}{2}}$.

b) $H(s) = \frac{1}{s-3}$

$\mathcal{L}[e^{3t}](s) = \frac{1}{s-3} \Longrightarrow h(t) = e^{3t}$

$\Longrightarrow g(t) = h(t-5)\,\mathbb{1}(t-5) = e^{3(t-5)}\,\mathbb{1}(t-5)$

5) a)

$$z^2Y(z)-z^2y_0-zy_1+2(zY(z)-zy_0)-3Y(z)=\frac{z}{z-3}$$

$$z^2Y(z)-5z^2+2z+2zY(z)-10z-3Y(z)=\frac{z}{z-3}$$

$$(z^2+2z-3)Y(z)=\frac{z}{z-3}+5z^2+8z$$

$$Y(z)=\frac{z}{(z-3)(z^2+2z-3)}+\frac{5z^2+8z}{z^2+2z-3}$$

b)

$$y_n=\operatorname*{res}_{z=3}\frac{z^{n-1}}{(z-3)(z+1)^2}+\operatorname*{res}_{z=-1}\frac{z^{n-1}}{(z-3)(z+1)^2}\quad \text{pro } n\geq 1$$

$$\cdot \operatorname*{res}_{z=3}\frac{z^{n-1}}{(z-3)(z+1)^2}=\frac{3^{n-1}}{16}$$

$$\cdot \operatorname*{res}_{z=-1}\frac{z^{n-1}}{(z-3)(z+1)^2}=\lim_{z\to-1}\left((z+1)^2\frac{z^{n-1}}{(z-3)(z+1)^2}\right)'=\lim_{z\to-1}\left(\frac{z^{n-1}}{z-3}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{(n-1)z^{n-2}(z-3)-z^{n-1}}{(z-3)^2}=\frac{-4(n-1)(-1)^{n-2}-(-1)^{n-1}}{16}$$

$\cdot$ Tedy $$y_n=\frac{3^{n-1}}{16}-\frac{4(n-1)(-1)^{n-2}+(-1)^{n-1}}{16}\quad \text{pro } n\geq 1.$$