Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (DD.MM.RRRR)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 123456789

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	Σ_1	1	2	3	4	Σ_2	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení" a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}[f(t)](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathscr{F}[f(t)](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}[f(t)\mathbf{1}(t-a)](s) = e^{-as} \mathscr{L}[f(t+a)](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathscr{L}[f(t)](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\sin(\alpha n)](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}[\cos(\alpha n)](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}[\alpha^n a_n](z) = \mathscr{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část (varianta A)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů]). Vypočtěte integrál

$$\int_C ze^z + \frac{3\,|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

Úloha 2 ([10 bodů]). Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)^2}.$$

(a) Nalezněte Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu 2. Dále určete mezikruží konvergence této řady.

(b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $g(z) = \frac{1}{(z-2)^{50}} f(z)$ a nalezněte $\operatorname{res}_2 g(z)$.

Úloha 3 ([10 bodů]). Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\mathbf{1}(\tau) y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-2|t|}.$$

(Nápověda: $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\mathbf{1}(t)\right](\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ a $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.)

Úloha 4 ([10 bodů]). Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \frac{n-3^n}{n!}.$$

(a) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

(b) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(a_{n+2})_{n=0}^{\infty}$.

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 123456789

Vstupní test (varianta A)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\frac{-1+2i}{2-i}.$$

Reálná část: ____________________

Imaginární část: ____________________

Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Určete velikost komplexního čísla

$$\frac{1}{e^{\overline{-1+5i}}}.$$

Velikost: ____________________

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete koeficient u $(z-8)^8$ v

$$\sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-8)^{n+10}.$$

Koeficient: ____________________

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z)=\sum_{n=-2}^{\infty} 2^{-n}(z-9)^{n+10},\ z\in P(9),$$

v bodě $z=9$. Jedná se o odstranitelnou singularitu, pól, nebo podstatnou singularitu? V případě pólu určete také jeho řád.

Typ: ____________________

Početní část (varianta B)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů])**.** Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3} - \frac{\sin z}{z^4}.$$

(a) Určete hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu 0.

(b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + \frac{1}{1+e^{iz}}$.

(c) Vypočtěte $\operatorname{res}_0 g(z)$, kde $g(z)$ je funkce z bodu (b).

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Vypočtěte

$$\int_C \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $\left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$.

Úloha 3 ([10 bodů])**.** Je dána funkce

$$f(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t-2).$$

(a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

(b) Z definice konvoluce vypočtěte $(f * f)(t)$.

(c) Nalezněte komplexní Fourierovy koeficienty zúžení funkce $f(t)$ na interval $[-2, 2]$.

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Je dána funkce

$$F(z) = \frac{4}{z^2 + 2z - 3}.$$

(a) Rozložte funkci $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí bodu ∞.

(b) Využitím výsledku z bodu (a) určete inverzní Z-transformaci funkce $F(z)$.

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....
Identifikační číslo: 123456789

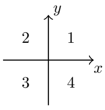
Vstupní test (varianta B)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body]). Určete, v jakém kvadrantu se nachází komplexní číslo

$$e^{98-\frac{6}{9}\pi i}.$$

Kvadrant: ____________________



Vstupní otázka 2 ([3 body]). Vyjádřete funkci

$$f(z) = \sin(-5iz),\ z \in \mathbb{C},$$

pomocí exponenciální funkce.

$f(z) =$ ____________________

Vstupní otázka 3 ([2 body]). Určete střed mocninné řady (v komplexní proměnné z)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2z+8)^{n+10}.$$

Střed: ____________________

Vstupní otázka 4 ([3 body]). Určete reziduum funkce

$$f(z) = \sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-7)^{2n+10},\ z \in P(7),$$

v bodě $z = 7$.

$\operatorname{res}_7 f(z) =$ ____________________

Početní část (varianta C)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů]). Je dána funkce

$$u(x, y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

(a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

(b) Pro všechny kladné hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na $\mathbb{C}$.

Úloha 2 ([10 bodů]). Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z - 3)^2}$$

do mocninné řady na okolí bodu -1. Dále určete poloměr konvergence této řady.

Úloha 3 ([10 bodů]). Spojitá funkce $f(t)$ z $L^1(\mathbb{R})$ má Fourierovu transformaci

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}.$$

(a) Nalezněte funkci $f(t)$.

(b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(t + 1)\cos(2t)$.

Úloha 4 ([10 bodů]). Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y'(t) - 3\int_0^t e^{-2\tau} y(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau = -4e^{-3t}$$

splňující $y(0) = 1$.

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....
Identifikační číslo: 123456789

Vstupní test (varianta C)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$e^{(-1+2i)^2}.$$

Reálná část: ____________________

Imaginární část: ____________________

Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Určete velikost komplexního čísla

$$e^{-2+8i}e^{8-9i}.$$

Velikost: ____________________

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete koeficient u $(z+9)^8$ v

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4^n (z+9)^{3n+2}.$$

Koeficient: ____________________

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \sum_{n=8}^{\infty} 3^n (z-8)^{2n-20}, \ z \in P(8),$$

v bodě $z = 8$. Jedná se o odstranitelnou singularitu, pól, nebo podstatnou singularitu? V případě pólu určete také jeho řád.

Typ: ____________________

Početní část (varianta D)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů])**.** Je dána funkce

$$u(x,y) = e^{-\alpha x}\sin(2y) + \beta y,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

1. Určete všechny hodnoty parametrů α a β, pro které je funkce $u(x,y)$ harmonická na $\mathbb{R}^2$.
2. Nalezněte kladnou hodnotu parametru α, parametr β a funkci $v(x,y)$ tak, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla holomorfní na $\mathbb{C}$ a $f(i\pi) = 2$.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3 ([10 bodů])**.** Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,\pi), \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

1. Zapište $f(t)$ pomocí Heavisideovy funkce.
2. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$.
3. Nalezněte Laplaceovu transformaci periodické funkce $g(t)$, která má periodu $T = 2\pi$ a na intervalu $[0, 2\pi)$ je dána předpisem $g(t) = f(t)$.

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je

$$F(z) = \ln\left(1 + \frac{9}{z^2}\right).$$

1. Pomocí rozvoje do Laurentovy řady nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
2. Nalezněte prvních pět členů posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_0 = b_1 = 1$ a pro každé $n \geq 2$ je $b_n = 0$.
3. Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(na_n)_{n=0}^{\infty}$.

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 123456789

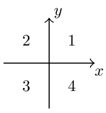
Vstupní test (varianta D)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body]). Určete, v jakém kvadrantu se nachází komplexní číslo

$$(-5+4i)^2 - 11.$$

Kvadrant: ____________________



Vstupní otázka 2 ([3 body]). Vyjádřete funkci

$$f(z) = \cos(5z+i),\ z \in \mathbb{C},$$

pomocí exponenciální funkce.

$f(z) =$ ____________________

Vstupní otázka 3 ([2 body]). Určete střed mocninné řady (v komplexní proměnné z)

$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{n^2}(6z+8)^{n+10}.$$

Střed: ____________________

Vstupní otázka 4 ([3 body]). Určete reziduum funkce

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n (z-2)^{3n-13},\ z \in P(2),$$

v bodě $z = 2$.

$\operatorname{res}_2 f(z) =$ ____________________

Početní část (varianta E)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů]). Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 2 ([10 bodů]). Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2}$$

a určete její poloměr konvergence.

Úloha 3 ([10 bodů]). Je dána funkce

$$f(t) = (t-3)e^{-t^2}.$$

1. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
2. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $(f * f')(t)$.
3. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(3t+4)e^{it}$.

Úloha 4 ([10 bodů]). Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y''(t) + y(t) = t - (t-1)\mathbf{1}(t-1)$$

splňující $y(0) = y'(0) = 0$.

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....
Identifikační číslo: 123456789

Vstupní test (varianta E)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body]). Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\ln(-5i).$$

Reálná část: ____________________

Imaginární část: ____________________

Vstupní otázka 2 ([3 body]). Určete velikost komplexního čísla

$$\frac{-e^{-2+8i}}{e^{8-9i}}.$$

Velikost: ____________________

Vstupní otázka 3 ([2 body]). Určete koeficient u $(z-6)^{-3}$ v

$$\sum_{n=-6}^{\infty} n^2 (z-6)^{2n+1}.$$

Koeficient: ____________________

Vstupní otázka 4 ([3 body]). Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+2)^{-n},\ z \in P(-2),$$

v bodě $z=-2$. Jedná se o odstranitelnou singularitu, pól, nebo podstatnou singularitu? V případě pólu určete také jeho řád.

Typ: ____________________

Početní část (varianta F)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů]). Je dána funkce

$$u(x, y) = x^3y - xy^3 + 6xy - 3y.$$

1. Ověřte, že $u(x, y)$ je harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.
2. Nalezněte funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na $\mathbb{C}$ a $f(1 + i) = 3 + 5i$.

Úloha 2 ([10 bodů]). Nalezněte součet mocninné řady Je dána funkce

$$f(z) = \frac{3}{z^{12} + 4z^{10}}.$$

1. Určete rozvoj funkce $f(z)$ do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu 0.
2. Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$.
3. Vypočtěte $\operatorname{res}_0 \left[\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z)\right]$.

Úloha 3 ([10 bodů]). Nalezněte inverzní Laplaceovu transformaci funkce

$$F(s) = \frac{1}{s^4 + 4} + \frac{e^{-3s}}{s + 1}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]). Pomocí $\mathscr{Z}$-transformace nalezněte řešení rovnice

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = n$$

splňující $y_0 = y_1 = 0$.

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....
Identifikační číslo: 123456789

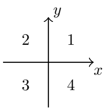
Vstupní test (varianta F)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete, v jakém kvadrantu se nachází komplexní číslo

$$86\left(\cos\left(\frac{8}{10}\pi\right) + i\sin\left(\frac{8}{10}\pi\right)\right).$$

Kvadrant: ____________________



Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Vyjádřete komplexní číslo

$$9\cos(16) + 9i\sin(16)$$

pomocí exponenciální funkce.

$9\cos(16) + 9i\sin(16) =$ ____________________

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete střed mocninné řady (v komplexní proměnné z)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-5z-10)^{6n+9}.$$

Střed: ____________________

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Určete reziduum funkce

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{6} (n+8)(z+5)^{-n+1},\ z \in P(-5),$$

v bodě $z = -5$.

$\mathrm{res}_{-5} f(z) =$ ____________________

Řešení varianty A

Vstupní test:

1) Usměrníme zlomek, abychom získali:

$$\frac{-1+2i}{2-i} = \frac{-1+2i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{-4+3i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Tedy Re $\frac{-1+2i}{2-i} = -\frac{4}{5}$ a Im $\frac{-1+2i}{2-i} = \frac{3}{5}$.

2) Jest

$$\frac{1}{\overline{e^{-1+5i}}} = \frac{1}{e^{-1-5i}} = e^{1+5i} = e(\cos 5 + i\sin 5).$$

Tedy $|\frac{1}{\overline{e^{-1+5i}}}| = |e(\cos 5 + i\sin 5)| = e|(\cos 5 + i\sin 5)| = e$.

3) $n + 10 = 8$ právě když $n = -2$. Koeficient u $(z-8)^8$ v

$$\sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-8)^{n+10}.$$

je tedy $2^{-(-2)} = 4$.

4) Řada

$$\sum_{n=-2}^{\infty} 2^{-n}(z-9)^{n+10}$$

obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-9)$, neboť $n+10 \geq 8$ pro $n \geq -2$. Jedná se tedy o odstranitelnou singularitu.

Početní část:

1) Z Cauchyovy věty plyne, že $\int_C ze^z \,\mathrm{d}z = 0$. Parametrizace kladně orientované kružnice o rovnici $|z| = 2$ je $\varphi(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Z definice křivkového integrálu máme

$$\int_C \frac{3\,|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{e^{it}} - 2e^{-it}\right)2ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2i\,\mathrm{d}t = 4\pi i.$$

Odtud $\int_C ze^z + \frac{3|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z = 4\pi i$.

2) (a) Jednoduchou úpravou dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{z-1}{z} = \frac{1}{(z-2)^2}\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

Rozvoj členu $\frac{1}{z}$ do mocninné řady se středem 2 je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n$$

pro $|z-2| < 2$. Nyní dáme dohromady výše uvedené vztahy, čímž obdržíme rozvoj $f(z)$ do Laurentovy řady ve tvaru

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^{n-2} \quad \text{pro } 0 < |z-2| < 2.$$

Mezikruží konvergence je určeno nerovnostmi $0 < |z-2| < 2$.

(b) Funkce $g(z)$ je podílem dvou celistvých funkcí. Čitatel $z-1$ má v bodech 0 a 2 kořeny násobnosti 0. Jmenovatel $z(z-2)^{52}$ má v bodě 0 kořen násobnosti 1 a v bodě 2 kořen násobnosti 52. Proto má funkce g v bodě 0 jednoduchý pól a v bodě 2 má pól řádu 52.

Díky (a) je

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)^{52}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^{n-52}$$

pro $0 < |z-2| < 2$. Koeficient u $(z-2)^{-1}$ v tomto rozvoji je hledané reziduum. Proto $\operatorname{res}_2 g(z) = \frac{1}{2^{52}}$.

3) Integrál na levé straně rovnice je konvoluce funkcí $e^{-|t|}\mathbf{1}(t)$ a $y(t)$. Aplikací Fourierovy transformace na zadanou rovnici obdržíme

$$\hat{y}(\omega) + \frac{1}{1+i\omega}\hat{y}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}.$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme obraz $\hat{y}(\omega)$ hledaného řešení $y(t)$. V našem případě máme

$$\hat{y}(\omega) = \frac{4(\omega - i)}{(\omega - 2i)^2(\omega + 2i)}.$$

Využitím inverzní Fourierovy transformace dostaneme

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\omega.$$

Integrál z inverzní Fourierovy transformace vypočteme metodou reziduí. Označme

$$h(z) = \frac{4(z-i)e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)}.$$

Tato funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$. V bodě $-2i$ má pól řádu 1 a v bodě $2i$ má pól řádu 2. Proto

$$\operatorname{res}_{-2i} h(z) = \lim_{z \to -2i} \frac{4(z-i)e^{izt}}{(z-2i)^2} = \frac{3i}{4} e^{2t},$$
$$\operatorname{res}_{2i} h(z) = \lim_{z \to 2i} \left[\frac{4(z-i)e^{izt}}{z+2i}\right]' = -i\frac{3-4t}{4} e^{-2t}.$$

Odtud

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} -i \operatorname{res}_{-2i} h(z) = \frac{3}{4} e^{2t} & \text{pro } t < 0, \\ i \operatorname{res}_{2i} h(z) = \left(\frac{3}{4} - t\right) e^{-2t} & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$

Celkem tak máme

$$y(t) = \frac{3}{4} e^{-2|t|} - t e^{-2t} \mathbf{1}(t).$$

4) (a) Díky základním vlastnostem Z-transformace máme

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) &= \mathscr{Z}\left[\frac{n}{n!}\right](z) - \mathscr{Z}\left[\frac{3^n}{n!}\right](z)\\ &= -z\left(\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z)\right)' - \mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right]\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} - e^{\frac{3}{z}}.\end{aligned}$$

(b) Podle věty O obrazu posunutí je

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+2}\right](z) = z^2\left(\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right) = ze^{\frac{1}{z}} - z^2 e^{\frac{3}{z}} + z^2 + 2z.$$

Řešení varianty B

Vstupní test:

1) Protože $-\pi < -\frac{2}{3}\pi < -\frac{\pi}{2}$ a

$$e^{98-\frac{6}{9}\pi i} = 98\left(\cos\left(-\frac{6}{9}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{6}{9}\pi\right)\right) = 98\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right),$$

což je goniometrický tvar komplexního čísla, leží $e^{98-\frac{6}{9}\pi i}$ ve 3. kvadrantu.

2) Jest

$$f(z) = \sin(-5iz) = \frac{e^{i(-5iz)} - e^{-i(-5iz)}}{2i} = \frac{e^{5z} - e^{-5z}}{2i}.$$

3) Střed mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2z+8)^{n+10}.$$

je 4, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2z+8)^{n+10} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2)^{n+10}(z-4)^{n+10}.$$

4) Faktor $(z-7)^{-1}$ se v Laurentově řadě

$$\sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-7)^{2n+10}$$

nevyskytuje, neboť $2n+10=-1$ právě tehdy, když $n=-\frac{11}{2}$. Tedy $\operatorname{res}_7 f(z) = 0$.

Početní část:

1) (a) Využijeme-li známé rozvoje funkcí sinus a kosinus do mocninné řady se středem v bodě 0, dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right) - \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + \dots\right) - \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots\right) \\ &= -\frac{1}{z^3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right)z + \dots = -\frac{1}{z^3} + \frac{2}{3}\frac{1}{z} - \frac{1}{20}z + \dots . \end{aligned}$$

Hlavní část Laurentovy řady funkce f na $P(0)$ proto je

$$-\frac{1}{z^3} + \frac{2}{3}\frac{1}{z}.$$

(b) Protože $\frac{1}{1+e^{iz}}$ je holomorfní na okolí 0, vidíme z výsledku v (a), že 0 je pól řádu 3 funkce g. Další singularity funkce $g(z)$ už mohou pocházet pouze od členu $\frac{1}{1+e^{iz}}$, neboť $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hledejme tedy, kdy $1 + e^{iz} = 0$. Z vlastností exponenciální funkce víme, že $e^{iz} = -1$ právě tehdy, když $z = (2k+1)\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Protože

$$(1 + e^{iz})'|_{z=(2k+1)\pi} = ie^{i(2k+1)\pi} = -i \neq 0,$$

jsou body $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jednoduché póly funkce g.

(c) Z definice rezidua a z (a) plyne, že $\operatorname{res}_0 g(z) = \frac{2}{3}$.

2) Integrand má izolované singularity v bodech $k \in \mathbb{Z}$. Z těchto bodů leží uvnitř kružnice C jen 0 a 1 (všechny ostatní leží vně C). Z Reziduové věty proto máme

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_0 \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)} + \operatorname{res}_1 \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)}\right)\\ &= 2\pi i \left(\frac{3}{6}\frac{1}{\pi\cos 0} + \frac{4}{7}\frac{1}{\pi\cos\pi}\right) = -\frac{i}{7}.\end{aligned}$$

3) (a) Z definice Fourierovy transformace plyne, že

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{2} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{i\omega} - e^{-2i\omega}}{i\omega}$$

pro $\omega \neq 0$. Ze spojitosti funkce $\hat{f}$ dostaneme $\hat{f}(0) = 3$.

(b)

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-1}^{2} \mathbf{1}(t-\tau+1) - \mathbf{1}(t-\tau-2)\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{t-2}^{t+1} \mathbf{1}(u+1) - \mathbf{1}(u-2)\,\mathrm{d}u\\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in (-\infty,-2) \cup (4,\infty);\\ t+2 & \text{pro } t \in [-2,1);\\ 4-t & \text{pro } t \in [1,4]. \end{cases}\end{aligned}$$

(c) Fourierovy koeficienty zúžení funkce f na interval $[-2,2]$ jsou

$$c_n = \frac{1}{4}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{pro } n = 0,\\ \frac{1}{4}\frac{e^{i\frac{\pi n}{2}} - e^{-2i\frac{\pi n}{2}}}{i\frac{\pi n}{2}} = \frac{i^n - (-1)^n}{2i\pi n}, & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$

4) (a) Rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$F(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}.$$

Nyní musíme každý z parciálních zlomků rozvinout na okolí nekonečna. Tedy

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > 1$ a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > 3$. Rozvoj funkce $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí nekonečna tak je

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}3^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 3^{n-1}}{z^n} \end{aligned}$$

pro $|z| > 3$.

(b) Z (a) plyne, že

$$\begin{aligned} &\mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 0, \\ &\mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = 1 + (-1)^n 3^{n-1}, \text{ pro } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Řešení varianty C

Vstupní test:

1) Jest
$$(-1+2i)^2 = -3-4i,$$
takže
$$e^{(-1+2i)^2} = e^{-3-4i} = e^{-3}(\cos(-4) + i\sin(-4)).$$
Tedy $\operatorname{Re} e^{(-1+2i)^2} = e^{-3}\cos(-4)$ a $\operatorname{Im} e^{(-1+2i)^2} = e^{-3}\sin(-4)$.

2) Protože
$$e^{-2+8i}e^{8-9i} = e^{6-i} = e^6(\cos(-1) + i\sin(-1)),$$
je $|e^{-2+8i}e^{8-9i}| = e^6|\cos(-1) + i\sin(-1)| = e^6$.

3) Protože $3n+2 = 8$ právě tehdy, když $n = 2$, ale mocninná řada
$$\sum_{n=3}^{\infty} 4^n (z+9)^{3n+2}$$
je indexovaná až od $n = 3$, faktor $(z+9)^8$ se v řadě nevyskytuje. Koeficient u $(z+9)^8$ je tedy 0.

4) Řada
$$\sum_{n=8}^{\infty} 3^n (z-8)^{2n-20}$$
obsahuje konečně mnoho indexů n, pro které je exponent v $(z-8)^{2n-20}$ záporný. Nejmenší takový exponent je -4, neboť $2n-20|_{n=8} = -4$. Jedná se tedy o pól řádu 4.

Početní část:

1) (a) Přímočarým výpočtem zjistíme, že
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha^2 e^y \sin(\alpha x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin(\alpha x).$$
Tedy $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $1-\alpha^2 = 0$ nebo $\alpha = 0$. Funkce u je proto harmonická na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

(b) Ať $\alpha = 1$. Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^y \cos x + 3y + 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^y \sin x - 3x.$$

Integrací první podmínky dostaneme

$$v(x,y) = e^y \cos x + \frac{3}{2}y^2 + y + C(x),$$

kde $C(x)$ je zatím neurčená reálná funkce proměnné x. Dosazením do druhé podmínky obdržíme $C'(x) = -3x$. Tedy $C(x) = -\frac{3}{2}x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Proto

$$v(x,y) = e^y \cos x + \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{3}{2}x^2 + K, \text{ kde } K \in \mathbb{R}.$$

2) Protože

$$\frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z+1}{4}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

pro $|z+1| < 4$, je

$$f(z) = (z+1)\frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}(z+1)^n$$

pro $|z+1| < 4$. Poloměr konvergence je 4.

3) (a) Hledaný funkce $f(t)$ je inverzní Fourierovou transformací funkce $\hat{f}(\omega)$, tj.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

K výpočtu integrálu využijeme metodu reziduí. Položme

$$h(z) = \frac{ze^{izt}}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{ze^{izt}}{(z^2+4)(z^2+1)}.$$

Funkce $h(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C}\backslash\{-2i, -i, i, 2i\}$ a v bodech $\pm i, \pm 2i$ má jednoduché póly. Pro $t \geq 0$ tak máme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}2\pi i\left[\operatorname{res}_i h(z) + \operatorname{res}_{2i} h(z)\right] = \frac{i}{6}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right).$$

Pro $t < 0$ je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\left[\operatorname{res}_{-i} h(z) + \operatorname{res}_{-2i} h(z)\right] = -\frac{i}{6}\left(e^{t} - e^{2t}\right).$$

Odtud

$$f(t) = \frac{i}{6}\left(e^{-|t|} - e^{-2|t|}\right)\operatorname{sgn} t, \; t \in \mathbb{R}.$$

(b) Využitím základních vlastností Fourierovy transformace obdržíme

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \mathscr{F}\left[f(t+1)\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right](\omega) \\
&= \frac{1}{2}\mathscr{F}\left[f(t+1)\right](\omega-2) + \frac{1}{2}\mathscr{F}\left[f(t+1)\right](\omega+2) \\
&= \frac{1}{2}e^{i(\omega-2)}\hat{f}(\omega-2) + \frac{1}{2}e^{i(\omega+2)}\hat{f}(\omega+2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\omega-2)e^{i(\omega-2)}}{(\omega-2)^4 + 5(\omega-2)^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{(\omega+2)e^{i(\omega+2)}}{(\omega+2)^4 + 5(\omega+2)^2 + 4}.
\end{aligned}$$

4) Aplikací Laplaceovy transformace dostaneme

$$sY(s) - 1 - \frac{3}{s+2}Y(s) = -\frac{4}{s+3}.$$

Odtud si vyjádříme Laplaceův obraz řešení. Dostáváme tak

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+3)^2}.$$

Protože $Y(s)$ má v bodě -3 dvojnásobný pól, je

$$y(t) = \operatorname{res}_{-3} Y(s)e^{st} = \lim_{s\to-3} \left[(s+2)e^{st}\right]' = \lim_{s\to-3} e^{st} + t(s+2)e^{st}$$
$$= (1-t)e^{-3t},\ t \geq 0.$$

Řešení varianty D

Vstupní test:

1) Jest

$$(-5+4i)^2 - 11 = 9 - 40i - 11 = -2 - 40i,$$

tedy $\mathrm{Re}\,((-5+4i)^2-11) < 0$ a $\mathrm{Im}\,((-5+4i)^2-11) < 0$. Číslo $(-5+4i)^2 - 11$ tedy leží ve 3. kvadrantu.

2) Z definice funkce cos máme

$$\cos(5z+i) = \frac{e^{i(5z+i)} + e^{-i(5z+i)}}{2} = \frac{e^{5iz-1} + e^{1-5iz}}{2}.$$

3) Protože

$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{n^2}(6z+8)^{n+10} = \sum_{n=10}^{\infty} 3^{n^2} 6^{n+10}\left(z - \left(-\frac{8}{6}\right)\right)^{n+10},$$

střed této mocninné řady je $-\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$.

4) Jest $3n - 13 = -1$ právě tehdy, když $n = 4$. Koeficient u $(z-2)^{-1}$ v Laurentově řadě

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n (z-2)^{3n-13}$$

je tedy $2^n|_{n=4} = 16$, takže $\mathrm{res}_2\, f(z) = 16$.

Početní část:

1) (a) Přímočarým výpočtem zjistíme, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{-\alpha x}\sin(2y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{-\alpha x}\sin(2y).$$

Tedy $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha^2 - 4 = 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$. Proto u je harmonická na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha \in \{-2, 2\}$ a $\beta \in \mathbb{R}$.

(b) Z rovnosti $f(i\pi) = 2$ plyne, že $\beta = \frac{2}{\pi}$. Díky (a) víme, že $\alpha = 2$ je jediná kladná hodnota parametru α, pro kterou může být u reálnou částí holomorfní funkce. Pro tyto hodnoty parametrů dostaneme Cauchyovy-Riemannovy podmínky ve tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{-2x}\sin(2y),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{-2x}\cos(2y) - \frac{2}{\pi}.$$

Integrací první podmínky máme $v(x,y) = e^{-2x}\cos(2y) + C(x)$. Dosazením do druhé podmínky dostaneme $C'(x) = -\frac{2}{\pi}$. Tedy $C(x) = -\frac{2}{\pi}x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Z $f(i\pi) = 2$ plyne, že $v(0,\pi) = 0$, a proto $K = -1$. Celkem tak máme

$$v(x,y) = e^{-2x}\cos(2y) - \frac{2}{\pi}x - 1.$$

2) Nejdříve vypočteme metodou reziduí integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x.$$

Ať

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 6z + 10}.$$

Funkce $g(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{3-i, 3+i\}$ a má v bodech $3 \pm i$ jednoduché póly. Proto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{res}_{3+i} g(z) = \pi e^{i(3+i)} = \frac{\pi}{e}(\cos 3 + i \sin 3).$$

Díky tomu je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im} I = \frac{\pi}{e}\sin 3.$$

3) (a)

$$f(t) = (\cos t)\left(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi)\right),\ t \in [0,\infty).$$

(b) Využijeme-li znalost Laplaceova obrazu funkce kosinus, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) &= \frac{s}{s^2+1} - \mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-\pi)\cos t\right](s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\mathscr{L}\left[\cos t\right](s)\\ &= \frac{s\left(1 + e^{-\pi s}\right)}{s^2+1}.\end{aligned}$$

(c) Z (b) a věty O Laplaceově transformaci periodické funkce máme

$$\mathscr{L}\left[g(t)\right](s) = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{s\left(1 + e^{-\pi s}\right)}{\left(1 - e^{-2\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}.$$

4) (a) Protože $\ln(1+\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\zeta^n$ pro $|\zeta| < 1$, je

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{9^n}{z^{2n}}$$

pro $|z| > 3$. Odtud $a_0 = a_{2n+1} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}9^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(b) Využitím výsledku z (a) a definice konvoluce dostaneme, že $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 9$ a $c_4 = -\frac{81}{2}$.

(c) Z věty o derivaci obrazu plyne

$$\mathscr{Z}\left[n a_n\right](z) = -zF'(z) = \frac{18}{z^2+9}.$$

Řešení varianty E

Vstupní test:

1) Z definice hlavní hodnoty logaritmu je

$$\ln(-5i) = \ln|-5i| + i\arg(-5i) = \ln 5 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Tedy $\mathrm{Re}\,(\ln(-5i)) = \ln 5$ a $\mathrm{Im}\,(\ln(-5i)) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Jest

$$\frac{-e^{-2+8i}}{e^{8-9i}} = -e^{-2+8i-(8-9i)} = -e^{-10+17i} = -e^{-10}\left(\cos 17 + i\sin 17\right),$$

tedy $\left|\frac{-e^{-2+8i}}{e^{8-9i}}\right| = e^{-10}\left|\cos 17 + i\sin 17\right| = e^{-10}$.

3) Platí $2n+1 = -3$ právě tehdy, když $n = -2$. Koeficient u $(z-6)^{-3}$ v

$$\sum_{n=-6}^{\infty} n^2 (z-6)^{2n+1}$$

tedy je $n^2|_{n=-2} = (-2)^2 = 4$.

4) Laurentova řada

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+2)^{-n}$$

obsahuje nekonečně mnoho záporných mocnin $(z+2)$, neboť $-n < 0$ pro každé $n \geq 10$. Jedná se tedy o podstatnou singularitu.

Početní část:

1) Ať $f(z) = \frac{2-z}{(z^2-4z+5)^2}$. Funkce $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{2-i, 2+i\}$. V bodech $2 \pm i$ má funkce $f(z)$ póly řádu 2. Protože jen pól $2+i$ leží v horní polorovině, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\mathrm{res}_{2+i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2+i}\left[\frac{2-x}{(x-2+i)^2}\right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2+i} \frac{-(x-2+i)^2 - 2(2-x)(x-2+i)}{(x-2+i)^4} = 0.$$

2) Derivace zadané řady je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n+1} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = z\cos z,\ z \in \mathbb{C}.$$

Proto
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2} = \int z \cos z \, \mathrm{d}z = z \sin z + \cos z + C$$
pro všechna $z \in \mathbb{C}$, kde $C \in \mathbb{C}$. Dosadíme-li $z = 0$, obdržíme $C = -1$. Tedy
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2} = z \sin z + \cos z - 1$$
pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Poloměr konvergence je ∞.

3) (a) Ze základních vlastností Fourierovy transformace a ze znalosti obrazu funkce e^{-t^2} plyne, že
$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \mathscr{F}\left[te^{-t^2}\right](\omega) - 3\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega) = i\left(\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega)\right)' - 3\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega) \\ &= -\sqrt{\pi}\left(\frac{i\omega}{2} + 3\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}.\end{aligned}$$

(b) Zkombinujeme-li znalosti o obrazu konvoluce a derivace, dostaneme
$$\mathscr{F}\left[(f * f')(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega) i\omega \hat{f}(\omega) = \pi i\omega\left(\frac{i\omega}{2} + 3\right)^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

(c) Použitím základních vlastností Fourierovy transformace obdržíme
$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \mathscr{F}\left[f(3t+4)e^{it}\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(3t+4)\right](\omega - 1) \\ &= \frac{1}{3}\mathscr{F}\left[f(t+4)\right]\left(\frac{\omega-1}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{4i}{3}(\omega-1)}\hat{f}\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \\ &= -\sqrt{\pi}\left(\frac{i(\omega-1)}{18} + 1\right)e^{\frac{4i}{3}(\omega-1)}e^{-\frac{(\omega-1)^2}{36}}.\end{aligned}$$

4) Aplikací Laplaceovy transformace obdržíme
$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}.$$
Odtud je
$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$
Nejdříve nalezneme vzor k prvnímu členu. Ať $g(t)$ je Laplaceův vzor k funkci $G(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Pak
$$\begin{aligned}g(t) &= \operatorname{res}_{-i} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_{i} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_{0} G(s)e^{st} \\ &= \lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{s^2(s-i)} + \lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{s^2(s+i)} + \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{st}}{s^2+1}\right)' \\ &= \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it}}{-2i} + \lim_{s\to 0}\frac{te^{st}(s^2+1) - 2se^{st}}{(s^2+1)^2} = t - \sin t.\end{aligned}$$

Zbývá nalézt vzor k druhému členu z vyjádření funkce $Y(s)$, tj. k členu $e^{-s}G(s)$. Využitím znalosti obrazu posunuté funkce máme

$$e^{-s}G(s) = e^{-s}\mathscr{L}\left[g(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[g(t-1)\mathbf{1}(t-1)\right](s)\,.$$

Odtud plyne, že hledané řešení je

$$y(t) = g(t) - g(t-1)\mathbf{1}(t-1) = t - \sin t - \left[t - 1 - \sin(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1),\ t \geq 0.$$

Řešení varianty F

Vstupní test:

1) Číslo
$$86\left(\cos\left(\frac{8}{10}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8}{10}\pi\right)\right).$$
je v goniometrickém tvaru. Protože $\frac{\pi}{2}<\frac{8}{10}\pi=\frac{4}{5}\pi<\pi$, číslo $86\left(\cos\left(\frac{8}{10}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8}{10}\pi\right)\right)$ leží ve 2. kvadrantu.

2) Máme
$$9\cos(16)+9i\sin(16)=9(\cos(16)+i\sin(16))=e^{\ln 9}(\cos(16)+i\sin(16)).$$
Z definice exponenciální funkce tedy plyne $9\cos(16)+9i\sin(16)=e^{\ln 9+16i}$.

3) Jest
$$\sum_{n=1}^{\infty}n(-5z-10)^{6n+9}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-5)^{6n+9}(z+2)^{6n+9}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-5)^{6n+9}(z-(-2))^{6n+9}.$$
Střed je tedy -2.

4) Jest $-n+1=-1$ právě tehdy, když $n=2$. Koeficient u $(z+5)^{-1}$ v Laurentově řadě
$$\sum_{n=-\infty}^{6}(n+8)(z+5)^{-n+1}$$
je tedy $(n+8)|_{n=2}=10$. Takže $\operatorname{res}_{-5}f(z)=10$.

Početní část:

1) (a) Protože $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6xy=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, je u harmonická na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou
$$\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2y-y^3+6y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-x^3+3xy^2-6x+3.$$
Z první podmínky plyne, že
$$v(x,y)=\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{1}{4}y^4+3y^2+C(x).$$
Dosazením do druhé podmínky obdržíme $C'(x)=-x^3-6x+3$. Proto
$$C(x)=-\frac{1}{4}x^4-3x^2+3x+K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Navíc požadovaná rovnost $f(1+i) = 3+5i$ implikuje $v(1,1) = 5$. Odtud $K = 1$. Tedy

$$v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + 3y^2 - \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + 1.$$

2) (a) Protože $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$ pro $|\zeta| < 1$, je

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{4z^{10}} \frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{3}{4z^{10}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} z^{2n-10}, \; 0 < |z| < 2. \end{aligned}$$

(b) Protože

$$f(z) = \frac{3}{z^{10}(z^2+4)},$$

je $f(z)$ holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, -2i, 2i\}$. V bodech $\pm 2i$ má jednoduché póly a v bodě 0 má pól řádu 10.

(c) Díky (a) je

$$\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9}f(z) = \frac{1}{z^{10}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} z^{2n-19} = \frac{3}{4}\frac{1}{z^{19}} + \cdots + \frac{3}{4^9}\frac{1}{z^3} - \frac{3}{4^{10}}\frac{1}{z} + \frac{3}{4^{11}}z + \ldots$$

pro $0 < |z| < 2$. Proto

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9}f(z) = -\frac{3}{4^{10}}.$$

3) Všechny řešení rovnice $s^4 + 4 = 0$ jsou $s_1 = 1+i$, $s_2 = -1+i$, $s_3 = 1-i$ a $s_4 = -1-i$. Proto má funkce $\frac{1}{s^4+4}$ jednoduché póly v bodech s_1, s_2, s_3 a s_4. Díky tomu je

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4+4}\right](t) &= \sum_{k=1}^{4} \operatorname{res}_{s_k} \frac{e^{st}}{s^4+4} = \sum_{k=1}^{4} \frac{e^{s_k t}}{4s_k^3} \\ &= \frac{e^{(1+i)t}}{8i(1+i)} + \frac{e^{(1-i)t}}{-8i(1-i)} + \frac{e^{(-1+i)t}}{-8i(-1+i)} + \frac{e^{(-1-i)t}}{8i(-1-i)} \\ &= \frac{e^t}{8}\left[-\frac{e^{it}(1+i)}{2} - \frac{e^{-it}(1-i)}{2}\right] \\ &\quad + \frac{e^{-t}}{8}\left[-\frac{e^{it}(-1+i)}{2} - \frac{e^{-it}(-1-i)}{2}\right] \\ &= \frac{e^t}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8}(\sin t + \cos t). \end{aligned}$$

Navíc

$$\frac{e^{-3s}}{s+1} = e^{-3s}\mathscr{L}\left[e^{-t}\right](s) = \mathscr{L}\left[e^{-(t-3)}\mathbf{1}(t-3)\right](s).$$

Odtud

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{e^t}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8}(\sin t + \cos t) + e^{-(t-3)}\mathbf{1}(t-3).$$

4) Aplikací Z-transformace dostaneme

$$z^2Y(z) - zY(z) - 6Y(z) = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)'.$$

Tedy

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-3)(z+2)}.$$

Funkce $Y(z)z^{n-1}$ má v bodě 1 pól řádu 2 a v bodech -2 a 3 má jednoduché póly pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Pro $n = 0$ má ještě funkce $Y(z)z^{n-1}$ v nule odstranitelnou singularitu. Proto

$$y_n = \operatorname{res}_{-2} Y(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_1 Y(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_3 Y(z)z^{n-1} = -\frac{n}{6} - \frac{1}{36} + \frac{3^n}{20} - \frac{(-2)^n}{45}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. (Pro $n = 0$ vzorec platí, neboť $z^{-1}Y(z)$ má v 0 pouze odstranitelnou singularitu, která do součtu reziduí nepřispěje.)