Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (13.01.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují).

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+2z+1)}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 1$ a určete parametry tohoto mezikruží.

(b) Určete $k \in \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-5)^k} - \frac{1}{(z-5)^6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n}, \; z \in P(5),$$

měla v bodě 5 odstranitelnou singularitu.

Úloha 2 ([10 bodů]). Spočtěte

$$\int_C \frac{1-\cos z}{z^4 - 2\pi z^3} + \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníku s vrcholy -1, $3\pi + i$ a $3\pi - i$.

Úloha 3 ([10 bodů]). Nechť $g(t) \in L^1(\mathbb{R})$ je spojitá funkce taková, že

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2 + i\omega + i\omega^3}{(\omega + 2i)^2(1+\omega^2)^2}.$$

Nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau = g(t).$$

[Nápověda: Využijte faktu, že $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.]

Úloha 4 ([10 bodů], podúloha (c) NEnavazuje na předchozí dvě).

(a) Zapište funkci

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{pokud } t \in [0,1), \\ 0, & \text{pokud } t \in [1,\pi), \\ \sin t, & \text{pokud } t \in [\pi,\infty), \end{cases}$$

pomocí Heavisideovy funkce.

(b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$ z bodu (a).

(c) Nechť $g(t) \in L_0$ je funkce splňující $g(t+5) = -g(t)$, $t \geq 0$. Pomocí Laplaceova obrazu $G(s)$ funkce $g(t)$ vyjádřete Laplaceovu transformaci periodické funkce $h(t)$ s periodou $T = 5$, která je na intervalu $[0,5)$ dána předpisem $h(t) = g(t)$.

1) a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+2z+1)} = \frac{1}{(z-1)^3}\,\frac{1}{(z+1)^2}$

$\cdot\ \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$

$\left|-\frac{z-1}{2}\right| < 1 \iff |z-1| < 2$

$\cdot\ \left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\frac{1}{(z+1)^2}$

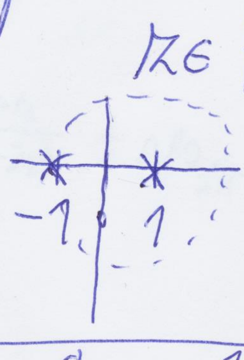
$\cdot\ \frac{1}{(z+1)^2} = -\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}\ \cancel{= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n (z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$

$\Longrightarrow\ f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-4}$

za $0 < |z-1| < 2$

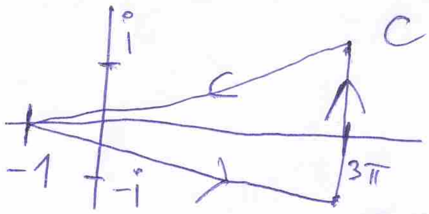
$z \in P(1,2)$



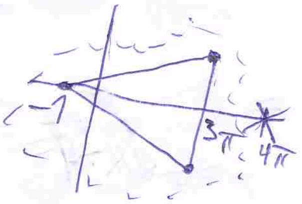
b) $g(z) = \frac{a}{(z-5)^k} - \frac{1}{(z-5)^6} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n} = \frac{a}{(z-5)^k} - \frac{1}{(z-5)^6} + \frac{1}{(z-5)^6} - \frac{1}{4(z-5)^3} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n}$

Je-li $a = \frac{1}{4}$ a $k = 3$, pak $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n}$

2) $\displaystyle\int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3} + \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\, dz =: I$



• $\displaystyle\int_C \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\, dz = 0$ z Cauchyovy věty



Funkce $\frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}$ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti obsahující křivku C.

• $\displaystyle\int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3} + \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\, dz = \int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3}\, dz$

integrál na pravé straně spočítáme pomocí reziduové věty

křivky

$$z^4-2\pi z^3 = z^3(z-2\pi)$$

- $0, 2\pi$ jsou izolované singularity funkce $\frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3}$, obě leží uvnitř křivky C

• Tedy $\displaystyle\int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} + \operatorname{res}_{2\pi} \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} \right)$

• $1-\cos z\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = 1-1=0$

• $(1-\cos z)'\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = \sin z\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = 0$

• $(1-\cos z)''\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = \cos z\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = 1 \neq 0$

Body $0, 2\pi$ jsou 2-násobné kořeny čitatele.

• 0 je 3-násobný kořen jmenovatele

• 2π je 1-násobný kořen jmenovatele

<u>0:</u> $3-2=1$ ... jednoduchý pól

$$\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2(z-2\pi)} \overset{LH,\,\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{3z^2-4\pi z} \overset{LH,\,\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

$$= \cancel{\lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{6z-4\pi}} \; \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{6z-4\pi} = -\frac{1}{4\pi}$$

<u>2π:</u> $2\geq 1$ ... odstranitelná singularita $\Rightarrow \operatorname{res}_{2\pi} \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} = 0$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{4\pi}+0\right) = \underline{\underline{-\frac{i}{2}}}$$

) $y'(t)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\, y(t-\tau)\,d\tau = g(t)$

$$i\omega\,\hat{y}(\omega)+\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega)\,\hat{y}(\omega)=\hat{g}(\omega)$$

$$i\omega\,\hat{y}(\omega)+\frac{2}{1+\omega^2}\,\hat{y}(\omega)=\frac{2+i\omega+i\omega^3}{(\omega+2i)^2(1+\omega^2)^2}$$

$$\frac{2+i\omega+i\omega^3}{1+\omega^2}\,\hat{y}(\omega)=\frac{2+i\omega+i\omega^3}{(\omega+2i)^2(1+\omega^2)^2}$$

$$\hat{y}(\omega)=\frac{1}{(\omega+2i)^2(1+\omega^2)}$$

- $1+\omega^2=0 \iff \omega=\pm i$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega+2i)^2(1+\omega^2)}\right](t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+2i)^2(1+\omega^2)}\,d\omega$$

- $$\operatorname{res}_{-2i}\frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{z\to-2i}\left(\frac{e^{izt}}{1+z^2}\right)' = \lim_{z\to-2i}\frac{ite^{izt}(1+z^2)-2ze^{izt}}{(1+z^2)^2}$$

$$=\frac{ite^{2t}(-3)+4ie^{2t}}{(-3)^2}$$

$$=\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}t\right)e^{2t}\,i$$

$$\operatorname{res}_{i}\frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)}=\frac{e^{-t}}{(-9)\,2z\big|_{z=i}}=\frac{e^{-t}}{18}\,i$$

$$\operatorname{res}_{-i}\frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)}=\frac{e^{t}}{-2z\big|_{z=-i}}=-\frac{e^{t}}{2}\,i$$

$t \geq 0:$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \operatorname{res}_{i} \frac{e^{ikt}}{(k+2i)^2(1+k^2)} = -\frac{e^{-t}}{18}$$

$t < 0:$

$$y(t) = \frac{-1}{2\pi} 2\pi i \left(\operatorname{res}_{-i} \frac{e^{ikt}}{(k+2i)^2(1+k^2)} + \operatorname{res}_{-2i} \frac{e^{ikt}}{(k+2i)^2(1+k^2)} \right)$$

$$= -\frac{e^{t}}{2} - \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}\right) e^{2t}$$

a) $f(t) = t^2\left(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)\right) + \sin(t)\, \mathbb{1}(t-\pi)$

b) $\cdot\ \mathcal{L}[t^2](s) = \dfrac{2}{s^3}$

$\cdot\ \mathcal{L}[t^2 \mathbb{1}(t-1)](s) = e^{-s}\mathcal{L}[(t+1)^2](s)$

$= e^{-s}\left(\mathcal{L}[t^2](s) + 2\mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[1](s)\right)$

$= e^{-s}\left(\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{1}{s}\right)$

$\cdot\ \mathcal{L}[\sin(t)\mathbb{1}(t-\pi)](s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}[\sin(t+\pi)](s)$

$= -e^{-\pi s}\mathcal{L}[\sin t](s) = -\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

c) $\mathcal{L}[h(t)](s) = \dfrac{\mathcal{L}[g(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-5))](s)}{1-e^{-5s}}$

$= \dfrac{G(s) - \mathcal{L}[g(t)\mathbb{1}(t-5)](s)}{1-e^{-5s}}$

$= \dfrac{G(s) - e^{-5s}\mathcal{L}[g(t+5)](s)}{1-e^{-5s}} = \dfrac{1+e^{-5s}}{1-e^{-5s}}G(s)$

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (19.01.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	Σ_1	1	2	3	4	Σ_2	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}[f(t)](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathscr{F}[f(t)](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}[f(t)\mathbf{1}(t-a)](s) = e^{-as} \mathscr{L}[f(t+a)](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathscr{L}[f(t)](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\sin(\alpha n)](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}[\cos(\alpha n)](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}[\alpha^n a_n](z) = \mathscr{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{(n+1)3^{n+2}}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Nechť má mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+5)^n$$

poloměr konvergence $R = 6$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 1 + i$?

(c) Určete hlavní část Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = (z-i)^2 + \frac{3}{(z-i)^5} + \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{n}{2}(z-i)^{3n}, \ z \in P(i),$$

v bodě $z_0 = i$.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 3 ([10 bodů], podúloha (c) NEnavazuje na předchozí dvě)**.**

(a) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \mathbb{1}(t+4) - \mathbb{1}(t-8), \ t \in \mathbb{R}.$$

[Nápověda: Transformaci počítejte z definice, integrál NEroztrhávejte.]

(b) Nalezněte Fourierovu řadu (v komplexním tvaru) funkce $g(t)$, která je zúžením funkce $f(t)$ na interval $[-10, 10]$.

(c) Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[(te^{-\frac{t^2}{4}}) * h''(2t+4) \right](\omega) \,.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 4y_n = (-2)^n$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 1$ a $y_1 = 0$.

1) a) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{(n+1)3^{n+2}}=\frac{z^2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}$$

- $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\frac{3}{3-z}$$

$$\xrightarrow{\int dz}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\int\frac{3}{3-z}dz=-3\ln(3-z)+C$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=-3\ln(3-z)+C\Big|_{z=0}$$

$$0=-3\ln 3+C$$

$$\Leftrightarrow C=3\ln 3$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=-3\ln(3-z)+3\ln 3=3(\ln 3-\ln(3-z))$$

- $$\left|\frac{z}{3}\right|<1\Leftrightarrow |z|<3$$

$$f(z)=\frac{z^2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\frac{z^2}{3}(\ln 3-\ln(3-z))\quad \text{za } |z|<3$$

$$z\in U(0,3)$$

b) $|1+i-(-5)|=|6+i|=\sqrt{37}>6 \Rightarrow$ red u tački $1+i$ divergira

c) $$f(z)=(z-i)^2+\frac{3}{(z-i)^5}+\frac{(-1)}{(z-i)^6}-\frac{1}{2(z-i)^3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2}(z-i)^{3n}$$

~~glavni dio~~ $\cancel{\frac{3}{(z-i)^5}-\frac{1}{(z-i)^6}-\frac{1}{2(z-i)^3}}$

· hlavní část $f \doteq \frac{3}{(z-i)^5} - \frac{1}{(z-i)^6} - \frac{1}{2(z-i)^3}$

2) $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2-2x+2)^2}\,dx\right)$

$z^2-2z+2=0$

$(z-1)^2-1+2=0$

$(z-1)^2=-1$

$z-1=\pm i$

$z=1\pm i$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi i \,\mathrm{res}_{1+i} \frac{e^{2iz}}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}$$

pól 2. řádu

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1+i}\left(\frac{e^{2iz}}{(z-1+i)^2}\right)' = 2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{2ie^{2iz}(z-1+i)^2-2(z-1+i)e^{2iz}}{(z-1+i)^4}$$

$$= 2\pi i\,\frac{2ie^{-2+2i}(-4)-4ie^{-2+2i}}{16} = \frac{\pi i}{8}(-12)ie^{-2+2i}$$

$$= \frac{3\pi}{2}e^{-2+2i}$$

$$I = \mathrm{Re}\left(\frac{3\pi}{2}e^{-2+2i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{3\pi}{2}e^{-2}(\cos 2 + i\sin 2)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}e^{-2}\cos 2}}$$

3) a) $\hat{f}(\omega)=\int_{-4}^{8} e^{-i\omega t}\,dt \overset{\omega\neq 0}{=} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-4}^{8} = \frac{1}{-i\omega}\left(e^{-8i\omega}-e^{4i\omega}\right)$

$$= \frac{e^{-8i\omega}-e^{4i\omega}}{\omega}\, i\,,\quad \omega\neq 0$$

$$\hat{f}(0)=\int_{-4}^{8} dt = 12$$

b) $c_n=\frac{1}{20}\int_{-10}^{10} g(t)\,e^{-\frac{\pi i n t}{10}}\,dt = \frac{1}{20}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\frac{\pi i n t}{10}}\,dt$

$$= \frac{1}{20}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{10}\right)$$

Fourierova vrsta $g(t) \ldots \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{20}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{10}\right) e^{\frac{\pi i n t}{10}} =$

$$\frac{12}{20} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi i n}{5}} - e^{\frac{2\pi i n}{5}}}{2\pi n}\, i\, e^{\frac{\pi i n t}{10}}$$

c) $\mathcal{F}\left[\left(t e^{-\frac{t^2}{4}}\right) * h''(2t+4)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[t e^{-\frac{t^2}{4}}\right](\omega)\; \mathcal{F}\left[h''(2t+4)\right](\omega)$

- $\mathcal{F}\left[t e^{-\frac{t^2}{4}}\right](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(2\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2}\right) = -4\omega i\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2}$

- $\mathcal{F}\left[h''(2t+4)\right](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[h''(t+4)\right]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{2i\omega}\mathcal{F}\left[h''(t)\right]\left(\frac{\omega}{2}\right) =$

$$= \frac{e^{2i\omega}}{2}\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

4) $y_{n+2} - 4y_n = (-2)^n$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$

$$z^2 Y(z) - z^2 - 4Y(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$(z^2-4)Y(z) = \frac{z}{z+2} + z^2$$

$\cdot\ z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)^2(z-2)} + \frac{z^2}{(z-2)(z+2)} = \frac{z^3+2z^2+z}{(z+2)^2(z-2)}$$

$$y_n = \operatorname{res}_{-2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)} + \operatorname{res}_{2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)} = \frac{2^{n+2}+2\cdot 2^{n+1}+2^n}{16} = \frac{2^n}{16}(4+4+1) = \frac{9}{16}\cdot 2^n$$

pól 2. řádu

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)} = \lim_{z\to -2}\left(\frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{z-2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -2} \frac{\left((n+2)z^{n+1}+2(n+1)z^n+nz^{n-1}\right)(z-2) - z^{n+2} - 2z^{n+1} - z^n}{(z-2)^2}$$

$$= \frac{-4\left((n+2)(-2)^{n+1}+2(n+1)(-2)^n+n(-2)^{n-1}\right) - (-2)^{n+2} - 2(-2)^{n+1} - (-2)^n}{16}$$

$$= \frac{(-2)^n}{16}\left(8(n+2) - 8(n+1) + 2n - 4 + 4 - 1\right) = \frac{2n+7}{16}(-2)^n$$

$$y_n = \frac{9}{16} 2^n + \frac{2n+7}{16} (-2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (24.01.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení" a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)z^{2n+3}}{n!4^n}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Určete $\operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^4}$, kde $f(z)$ je funkce z (a).

(c) Nechť má Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+i)^n$$

vnitřní poloměr konvergence $r = 4$ a vnější $R = 10$. Konverguje tato Laurentova řada v bodě $z = 2 + i$?

Úloha 2 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{(1 + e^{iz})^2}.$$

(b) Spočtěte

$$\int_C \frac{2}{z+2i} + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2} + z^{10}\cos(8z^3)\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - i| = 1$.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\left(n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right) * \frac{4^n}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}.$$

(b) Určete a_0, a_5 a a_{10}, kde $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je inverzní Z-transformace funkce

$$F(z) = \frac{3}{z^{12}} + \frac{4}{z^{10}} + \frac{10}{z^9} + \frac{7}{z^5} + 8 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{z^{2n}}, \ z \in U(\infty).$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = t + \int_0^t \tau e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

splňující počáteční podmínky $y(0) = y'(0) = 0$.

1) a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+3}}{n!\, 4^n} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{n!\, 4^n}$

• $\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{n!\, 4^n} \, dz \overset{c}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3}}{n!\, 4^n} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n}{n!}$

$= z^3 e^{-\frac{z^2}{4}}$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{n!\, 4^n} = \left(z^3 e^{-\frac{z^2}{4}}\right)' = 3z^2 e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{z^4}{2} e^{-\frac{z^2}{4}} = \left(3z^2 - \frac{z^4}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{4}}$

• $f(z) = z\left(3z^2 - \frac{z^4}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{4}} = \left(3z^3 - \frac{z^5}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{4}}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$

$z \in U(0, \infty)$

---

b) $|2+i-(-i)| = |2+2i| = \sqrt{8} < 4$

Laurentova řada v $z = 2+i$ diverguje.

---

b) $\frac{f(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+3}}{n!\, 4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n-1}}{n!\, 4^n}$, $z \in P(0)$

$\operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^4} = \left. \frac{(-1)^n (2n+3)}{n!\, 4^n} \right|_{n=0} = \underline{3}$

2) a) $f(z) = \dfrac{\sin z + z - \pi}{(1+e^{iz})^2}$

• $1+e^{iz} = 0 \iff iz = i\pi + 2k\pi i \iff z = \pi + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$

• $(1+e^{iz})^2 \Big|_{z=\pi+2k\pi} = 0$

$\left((1+e^{iz})^2\right)' \Big|_{z=\pi+2k\pi} = 2(1+e^{iz})\, i e^{iz} \Big|_{z=\pi+2k\pi} = 0$

$\left((1+e^{iz})^2\right)'' \Big|_{z=\pi+2k\pi} = -2e^{2iz} - 2(1+e^{iz})e^{iz} \Big|_{z=\pi+2k\pi} = -2-0 \neq 0$

• Body $\pi+2k\pi$ jsou 2-násobné kořeny jmenovatele.

• $\sin z + z - \pi \Big|_{z=\pi+2k\pi} = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

• Pokud $\Big|_{z=\pi+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, není to kořen čitatele

• Body $z = (2k+1)\pi$, $k \neq 0$, jsou tedy póly 2. řádu

• $z = (2k+1)\pi \Big|_{k=0} = \pi$.

$(\sin z + z - \pi)\Big|_{z=\pi} = 0$

$(\sin z + z - \pi)'\Big|_{z=\pi} = \cos z + 1\Big|_{z=\pi} = 0$

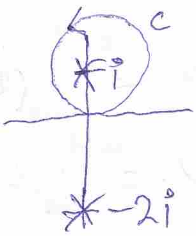
$(\sin z + z - \pi)''\Big|_{z=\pi} = -\sin z\Big|_{z=\pi} = 0$

$(\sin z + z - \pi)'''\Big|_{z=\pi} = -\cos z\Big|_{z=\pi} = 1 \neq 0$

Bod $z=\pi$ je 3-násobný kořen čitatele.

Bod $z=\pi$ je odstranitelná singularita.

b) $\int_C \frac{2}{z+2i} + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2} + z^{10}\cos(8z^3)\,dz =: I$



• Díky Cauchyovo větě platí $\int_C \frac{2}{z+2i} + z^{10}\cos(8z^3)\,dz = 0$

• $I = \int_C \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2}\right) = 2\pi i \cdot 3 = \underline{\underline{6\pi i}}$

3) a) $\mathcal{Z}\left[\left(n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right)*\frac{4^n}{n!}\right](z) = \mathcal{Z}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z)\ \mathcal{Z}\left[\frac{4^n}{n!}\right](z)$

- $\mathcal{Z}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z)$

- $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z) = z^3\,\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) - 0\cdot z^3 - 1z^2 - 0\cdot z$

$$= z^3\frac{z}{z^2+1} - z^2 = \frac{z^4 - z^4 - z^2}{z^2+1} = -\frac{z^2}{z^2+1}$$

- $\mathcal{Z}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z) = -z\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\right)' = z\frac{2z(z^2+1)-2z^3}{(z^2+1)^2} = \frac{2z^2}{(z^2+1)^2}$

- $\mathcal{Z}\left[\frac{4^n}{n!}\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!\,z^n} = e^{\frac{4}{z}}$

- $\mathcal{Z}\left[\left(n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right)*\frac{4^n}{n!}\right](z) = \underline{\underline{\frac{2z^2}{(z^2+1)^2}\cdot e^{\frac{4}{z}}}}\ ,\ z\in U(\infty)$

---

b) <u>absolutní člen:</u> $8+1=\underline{9=a_0}$

<u>koeficient u z^{-5}:</u> $7+0=\underline{7=a_5}$

<u>koeficient u z^{-10}:</u> $4+(25+1)=\underline{30=a_{10}}$

4) $y''(t) - y(t) = t + \int_0^t \tau e^{t-\tau}\, d\tau \,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

$$y''(t) - y(t) = t + t * e^t$$

$$s^2 Y(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2 - 1) Y(s) = \frac{s}{s^2 (s-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)^2(s+1)}$$

$$\cdot\ y(t) \doteq \operatorname{res}_0 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} + \operatorname{res}_1 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} + \operatorname{res}_{-1} \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_0 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-1} \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} = \frac{e^{-t}}{(-1)\cdot 4} = -\frac{e^{-t}}{4}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_1 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{s \to 1} \left(\frac{e^{st}}{s(s+1)} \right)' = \lim_{s \to 1} \frac{t e^{st} s(s+1) - (2s+1) e^{st}}{s^2 (s+1)^2} =$$

$$= \frac{2t e^t - 3 e^t}{4} = \frac{2t - 3}{4} e^t$$

$$\underline{\underline{y(t) = 1 + \frac{2t-3}{4} e^t - \frac{e^{-t}}{4} \,, \quad t \geq 0}}$$

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (26.01.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.** Mějme funkci

$$u(x,y) = e^{\alpha x}\cos y + xy^3 + \beta x^3 y,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

(a) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x,y)$ je harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

(b) Pro $\alpha = 1$ a $\beta = -1$ nalezněte funkci $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takovou, že $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je celistvá funkce a platí $f(\frac{\pi}{2}i) = i$.

Úloha 2. Spočtěte

$$\int_C \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^3} + \frac{\sin(z^2)}{e^z(z+1)^4}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaný obdélník s vrcholy $\frac{\pi}{4} + i$, $\frac{\pi}{4} - i$, $\pi + i$ a $\pi - i$.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2(1-e^{-2s})}$$

ve tvaru Fourierovy řady.

(b) Určete Laplaceův vzor $g(t)$ funkce

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

(c) Pomocí Laplaceova obrazu $H(s)$ „pěkné“ funkce $h(t) \in L_0$ splňující $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$, $h''(0) = 3$, vyjádřete

$$\mathscr{L}\left[h'''(t)\right](s)\,.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Nechť $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost taková, že

$$\mathscr{Z}\left[b_n\right](z) = \frac{z-1-2i}{z}.$$

Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = \sum_{k=0}^{n} k b_{n-k}$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = y_1 = 0$.

1) a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x}\cos y + y^3 + 3\beta x^2 y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y + 6\beta x y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{\alpha x}\sin y + 3xy^2 + \beta x^3$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{\alpha x}\cos y + 6xy$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y + 6\beta xy - e^{\alpha x}\cos y + 6xy$$
$$= (\alpha^2 - 1)e^{\alpha x}\cos y + 6(\beta+1)xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff \boxed{\alpha = \pm 1 \ \& \ \beta = -1}$$

b) $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + y^3 - 3x^2 y$

$\xRightarrow{\int dy}$ $v(x,y) = \int e^x\cos y + y^3 - 3x^2 y \, dy = e^x \sin y + \frac{y^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + C(x)$

- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y - 3xy^2 + x^3$

  $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y - 3xy^2 + C'(x)$

  $\Big\} \ C'(x) = x^3$

- $C(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

$$v(x,y) = e^x \sin y + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + K$$

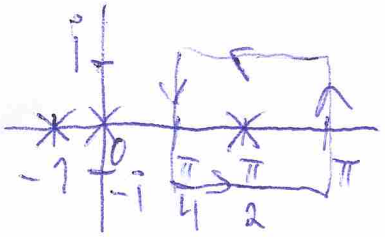
- $f\left(\frac{\pi}{2} i\right) = u\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + i\, v\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = i$

$$v\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$1 + \frac{\pi^4}{64} + K = 1 \iff K = -\frac{\pi^4}{64}$$

$$v(x,y) = e^x \sin y + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} - \frac{\pi^4}{64}$$

2)



$$I := \int_C \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^3} + \frac{\sin(z^2)}{e^z (z+1)^4}\, dz$$

• Z Cauchyovo věty plyne $\int_C \frac{\sin(z^2)}{e^z (z+1)^4}\, dz = 0$, tedy

$$I = \int_C \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^3}\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^3}$$

• $e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

$\left(e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}\right)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = ie^{iz} + 1\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i^2 + 1 = 0$

$\left(e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}\right)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -e^{iz}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} \neq 0$

2-násobný kořen

• $\frac{\pi}{2}$ je 3-násobný kořen jmenovatele

$\frac{\pi}{2}$ je jednoduchý pól

• $$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^3} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2}{\pi} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{(z-\frac{\pi}{2})^2}$$

$$\overset{LH, \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{ie^{iz} + 1}{2(z-\frac{\pi}{2})} \overset{LH, \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{-e^{iz}}{2} = -\frac{i}{\pi}$$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{i}{\pi}\right) = \underline{\underline{2}}$$

3) a) $1-e^{-2s}=0 \iff -2s=2k\pi i \iff s=k\pi i$ pro $k\in\mathbb{Z}$

$$f(t)=\operatorname{res}_{-3}\frac{e^{st}}{(s+3)^2(1-e^{-2s})}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{res}_{k\pi i}\frac{e^{st}}{(s+3)^2(1-e^{-2s})}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{-3}\frac{e^{st}}{(s+3)^2(1-e^{-2s})}\overset{\text{pól 2. řádu}}{=}\lim_{s\to-3}\left(\frac{e^{st}}{1-e^{-2s}}\right)'=\lim_{s\to-3}\frac{te^{st}(1-e^{-2s})-2e^{-2s}e^{st}}{(1-e^{-2s})^2}$$

$$=\frac{te^{-3t}\cancel{(1-e^{6})}}{1-e^{6}}-\frac{2e^{6}}{(1-e^{6})^2}e^{-3t}$$

$$=\left(\frac{t}{1-e^{6}}-\frac{2e^{6}}{(1-e^{6})^2}\right)e^{-3t}$$

$$\cdot\ \operatorname{res}_{k\pi i}\frac{e^{st}}{(s+3)^2(1-e^{-2s})}=\left.\frac{e^{k\pi i t}}{(k\pi i+3)^2\,2e^{-2s}}\right|_{s=k\pi i}=\frac{e^{k\pi i t}}{2(k\pi i+3)^2}$$

$$\boxed{f(t)=\left(\frac{t}{1-e^{6}}-\frac{2e^{6}}{(1-e^{6})^2}\right)e^{-3t}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2(k\pi i+3)^2}e^{k\pi i t}}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t)=t$ $\quad\ulcorner \mathcal{L}[t](s)=\frac{1}{s^2}\lrcorner$

$$\boxed{g(t)=(t-4)\,\mathbb{1}(t-4)}$$

c) $\boxed{\mathcal{L}[h'''(t)](s)=s^3H(s)-s^2-2s-3}$

4) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = \sum_{k=0}^{n} k\, b_{n-k}$, $y_0 = y_1 = 0$

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = n * b_n$$

$$z^2 Y(z) - 2zY(z) + 5Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{z-1-2i}{z} = \frac{z-1-2i}{(z-1)^2}$$

$$(z^2 - 2z + 5)Y(z) = \frac{z-1-2i}{(z-1)^2}$$

$z^2 - 2z + 5 = 0$

$(z-1)^2 + 4 = 0$

$z - 1 = \pm 2i$

$z = 1 \pm 2i$

$$Y(z) = \frac{1}{(z-1+2i)(z-1)^2}$$

$$y_n = \operatorname{res}_{1-2i} \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2} + \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2}$$

- $$\operatorname{res}_{1-2i} \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2} = \frac{(1-2i)^{n-1}}{(-2i)^2} = -\frac{(1-2i)^{n-1}}{4}$$

- $$\operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{z \to 1} \left(\frac{z^{n-1}}{z-1+2i} \right)' = \lim_{z \to 1} \frac{(n-1)z^{n-2}(z-1+2i) - z^{n-1}}{(z-1+2i)^2}$$

$$= \frac{2i(n-1) - 1}{(2i)^2} = \frac{1 - 2i(n-1)}{4}$$

$$\boxed{y_n = -\frac{(1-2i)^{n-1}}{4} + \frac{1-2i(n-1)}{4}}$$ pro $n \in \mathbb{N}$

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (31.01.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}[f(t)](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathscr{F}[f(t)](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}[f(t)\mathbf{1}(t-a)](s) = e^{-as} \mathscr{L}[f(t+a)](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathscr{L}[f(t)](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\sin(\alpha n)](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}[\cos(\alpha n)](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}[\alpha^n a_n](z) = \mathscr{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Rozviňte funkci
$$f(z) = \frac{1}{z^{10} + 4z^{13}}$$
do Laurentovy řady na maximálním okolí ∞ a určete parametry tohoto okolí.

(b) Rozviňte funkci
$$g(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$$
do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$. Dále určete $\operatorname{res}_0 g(z)$ a klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z)$ v bodě 0.

[Nápověda: Využijte známého rozvoje funkce $\sin z$.]

Úloha 2 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce
$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{(1 - \cos z)(z - 2\pi)}.$$

(b) Určete číslo $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce
$$g(z) = \frac{e^z + a}{z(z - \frac{\pi}{2}i)}$$
měla v bodě $z = \frac{\pi}{2}i$ odstranitelnou singularitu.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Spojité funkce $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mají Fourierovy transformace
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4} \qquad \text{a} \qquad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{(\omega + i)^2}.$$
Určete $(f * g)(t)$.

[Nápověda: Nejprve určete $\mathscr{F}\left[(f * g)(t)\right](\omega)$.]

(b) Pomocí Fourierovy transformace funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete
$$\mathscr{F}\left[h(t)\sin(2t)\right](\omega).$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice
$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}$$
splňující počáteční podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

1) a) $$f(z)=\frac{1}{z^{10}+4z^{13}}=\frac{1}{4z^{13}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{4z^3}}=\frac{1}{4z^{13}}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4z^3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4z^{13}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4z^3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}\,z^{3n+13}}\quad \text{pro } |z|>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\left|-\frac{1}{4z^3}\right|<1$$

$$|z|^3>\frac{1}{4}\qquad |z|>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

b) $$g(z)=z^5\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)=z^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=z^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{4n+2}}$$

$$=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{4n-3}}},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

- $4n-3=1 \iff n=1$

$$\operatorname{res}_0 g(z)=\left.\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|_{n=1}=-\frac{1}{3!}=\boxed{-\frac{1}{6}}$$

- Laurentův rozvoj funkce $g(z)$ na $P(0)$ obsahuje nekonečně mnoho záporných mocnin z $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{0 je podstatná singularita}}$

2) a) $\cos z = 1 \iff z = 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$

• $1 - e^{iz}\Big|_{z=2k\pi} = 0$

$(1-e^{iz})'\Big|_{z=2k\pi} = -i e^{iz} = -i \neq 0$

Body $z = 2k\pi$ jsou 1-násobné kořeny čitatele.

• $(1-\cos z)(z-2\pi)\Big|_{z=2k\pi} = 0$

$\left[(1-\cos z)(z-2\pi)\right]'\Big|_{z=2k\pi} = \sin z\,(z-2\pi) + 1 - \cos z\Big|_{z=2k\pi} = 0 + 1 - 1 = 0$

$\left[(1-\cos z)(z-2\pi)\right]''\Big|_{z=2k\pi} = \cos z\,(z-2\pi) + \sin z + \sin z\Big|_{z=2k\pi} = 2k\pi - 2\pi = 2(k-1)\pi$

• Pokud $k \neq 1$, pak $\left[(1-\cos z)(z-2\pi)\right]''\Big|_{z=2k\pi} \neq 0$, a tedy body $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$, jsou 2-násobné kořeny jmenovatele

$\boxed{\text{Pro } k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\} \text{ jsou body } z = 2k\pi \text{ jednoduché póly.}}$

• Pro $k = 1$, tj. $z = 2\pi$, je $\left[(1-\cos z)(z-2\pi)\right]''\Big|_{z=2\pi} = 0$

• $\left[(1-\cos z)(z-2\pi)\right]'''\Big|_{z=2\pi} = -\sin z\,(z-2\pi) + \cos z + \cos z + \cos z\Big|_{z=2\pi} = 3 \neq 0$

• Bod $z = 2\pi$ je 3-násobný kořen jmenovatele.

• $\boxed{\text{Bod } z = 2\pi \text{ je pól 2. řádu.}}$

b) Bod $z=\frac{\pi}{2}i$ je jednonásobný kořen jmenovatele.

Jest $e^{z}+a\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} = i+a$.

Pro $\boxed{a=-i}$ je tedy bod $z=\frac{\pi}{2}i$ ~~tedy~~ kořen čitatele (násobnosti 1), tedy v $z=\frac{\pi}{2}i$ má $g(z)$ odstranitelnou singularitu.

3) a) $\widehat{f*g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}$

$$(f*g)(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega$$

$\cdot\ \omega^2+4=0 \iff \omega = \pm 2i$

$\cdot\ \underline{t \geq 0:}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega = 2\pi i \ \mathrm{res}_{2i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} = 2\pi i\,\frac{e^{-2t}}{2\omega\big|_{\omega=2i}(3i)^2}$$

$$= 2\pi i\,\frac{e^{-2t}}{-36i} = -\frac{2\pi}{36}e^{-2t}$$

$\cdot\ \underline{t<0:}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega = -2\pi i\left(\mathrm{res}_{-2i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} + \mathrm{res}_{-i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\right)$$

$$\cdot\ \mathrm{res}_{-2i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} = \frac{e^{2t}}{2\omega\big|_{\omega=-2i}(-i)^2} = \frac{e^{2t}}{4i} = -\frac{e^{2t}}{4}i$$

$$\cdot\ \mathrm{res}_{-i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} \overset{\text{pol 2. řádu}}{=} \lim_{\omega\to -i}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+4}\right)' = \lim_{\omega\to -i}\frac{it\,e^{i\omega t}(\omega^2+4) - 2\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)^2}$$

$$= \frac{it\,e^{t}(3) + 2i\,e^{t}}{9} = i\left(\frac{t}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{t}$$

$$\cdot\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega = -\frac{2\pi}{4}e^{2t} + 2\pi\left(\frac{t}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{t}$$

$$(f*g)(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{36}e^{-2t} \ \dots \ t \geq 0 \\[2ex] \left(\dfrac{t}{3}+\dfrac{2}{9}\right)e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{2t} \ \dots \ t<0 \end{cases}$$

b) $\mathcal{F}\left[h(t)\sin 2t\right](\omega) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}\left[h(t)e^{2it}\right](\omega) - \mathcal{F}\left[h(t)e^{-2it}\right](\omega)\right]$

$= \frac{1}{2i}\left(\hat{h}(\omega-2) - \hat{h}(\omega+2)\right)$

4) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

$$s^2Y(s) - 1 - sY(s) - 2Y(s) = \frac{2}{s-2}$$

$$(s^2 - s - 2)\,Y(s) = \frac{s}{s-2}$$

$$(s-2)(s+1)\,Y(s) = \frac{s}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s-2)^2(s+1)}$$

$$y(t) = \operatorname{res}_2 \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)} + \operatorname{res}_{-1} \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)}$$

- $$\operatorname{res}_2 \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{s\to 2}\left(\frac{se^{st}}{s+1}\right)' = \lim_{s\to 2} \frac{(e^{st} + tse^{st})(s+1) - se^{st}}{(s+1)^2}$$

$$= \cancel{\lim_{s\to 2}} \frac{3(1+2t)e^{2t} - 2e^{2t}}{9} = \frac{1+6t}{9}e^{2t}$$

- $$\operatorname{res}_{-1} \frac{\cancel{t}\, se^{st}}{(s-2)^2(s+1)} = \frac{-e^{-t}}{(-3)^2} = -\frac{1}{9}e^{-t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1+6t}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t}}$$

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (02.02.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\mathbf{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúloha (c) NEnavazuje na přechozí)**.**

(a) Mějme funkci

$$u(x,y) = 2 + 3x - y + x^2 - y^2 - 4xy, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá funkce.

(b) Spočtěte $f'(1+i)$, kde $f(z)$ je funkce z (a).

(c) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \alpha z\bar{z} + i(\beta \operatorname{Im} z + 2\operatorname{Im}(z^2)), \ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná na přímce $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 1\}$.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(2x)}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je inverzní Z-transformace funkce

$$F(z) = z\ln\left(1 + \frac{3}{z^2}\right), \ z \in U(\infty).$$

Určete a_2, a_3, a_4, a_5.

[Nápověda: Nejprve pomocí známého rozvoje funkce $\ln z$ nalezněte Laurentův rozvoj funkce $F(z)$ na okolí ∞.]

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left((ni^n) * \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right)_{n=0}^{\infty}.$$

(c) Určete c_2 a c_3 posloupnosti

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (3^n)_{n=0}^{\infty} * (n^2)_{n=0}^{\infty}.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) + 9\int_0^t y(\tau)e^{-6(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = e^t$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

1) a) $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2x - 4y$

$v(x,y) = \int 3 + 2x - 4y \, dy = 3y + 2xy - 2y^2 + C(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2y + 4x$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$

$C'(x) = 1 + 4x$

$C(x) = \int 1 + 4x \, dx = x + 2x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

$v(x,y) = 3y + 2xy - 2y^2 + x + 2x^2 + K$.

---

b) $f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 3 + 2 - 4 + i(2 + 1 + 4) = \underline{1 + 7i}$

---

c) $z = x + iy$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xy$

$g(z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + i(\beta y + 4xy)$

$\operatorname{Re} g =: u(x,y) = \alpha x^2 + \alpha y^2$

$\operatorname{Im} g =: v(x,y) = \beta y + 4xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\alpha x$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \beta + 4x$

$x = 1$

$2\alpha = \beta + 4$

$\beta = 2\alpha - 4$

$\bullet \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2\alpha y$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 4y$

$\forall y \in \mathbb{R}$

$2\alpha y = -4y$

$2\alpha = -4$

$\boxed{\alpha = -2}$

$\beta = -4 - 4 = -8$

2) $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)\sin(2x)}{(x^2-6x+10)^2}\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{2ix}}{(x^2-6x+10)^2}\,dx \right)$

- $z^2 - 6z + 10 = 0$

$(z-3)^2 + 1 = 0$

$z = 3 \pm i$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{2ix}}{(x^2-6x+10)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}_{3+i} \frac{(z-3)e^{2iz}}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2}$

- $\operatorname{res}_{3+i} \frac{(z-3)e^{2iz}}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{z\to 3+i} \left(\frac{(z-3)e^{2iz}}{(z-3+i)^2} \right)' = \cancel{\lim_{z\to 3+i} e^{2iz} - 2i(z-3)}$

$$= \lim_{z\to 3+i} \frac{\left(e^{2iz} + 2i(z-3)e^{2iz}\right)(z-3+i)^2 - 2(z-3+i)(z-3)e^{2iz}}{(z-3+i)^4}$$

$$= \frac{(1-2)e^{-2+6i}(-4) - 2(2i)i\,e^{-2+6i}}{16} = \frac{(4+4)e^{-2+6i}}{16}$$

$$= \frac{e^{-2+6i}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{2ix}}{(x^2-6x+10)^2}\,dx = 2\pi i \frac{e^{-2+6i}}{2} = e^{-2+6i}\pi i$$

$$I = \operatorname{Im}\left(\pi i e^{-2+6i}\right) = \operatorname{Im}\left(\pi i e^{-2}(\cos 6 + i \sin 6)\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi \cos 6}{e^2}}$$

3) a) $F(z) = z\ln\left(1+\frac{3}{z^2}\right) = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{3}{z^2}\right)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,3^n}{n\,z^{2n-1}} = \frac{3}{z} - \frac{9}{2z^3} + \frac{27}{3z^5} + \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{9}{2} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 9 \end{aligned}}$$

b) $\mathcal{Z}\left[(n i^n) * \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = \mathcal{Z}[n i^n](z) \cdot \mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)$

$\cdot\ \mathcal{Z}[n i^n](z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[i^n](z) = -z\left(\frac{z}{z-i}\right)' = -z\,\frac{z-i-z}{(z-i)^2}$

$$= \frac{z}{(z-i)^2}\,i$$

$\cdot\ \mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = z^2\,\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)\right](z) - \sin(0)\cdot z^2 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)z$

$$= z^2\,\frac{-z}{z^2+1} + z = \frac{-z^3+z^3+z}{z^2+1} = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[(n i^n) * \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = \frac{z^2}{(z-i)^2(z^2+1)}\,i = \frac{z^2}{(z-i)^3(z+i)}\,i}$$

c) $c_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k (n-k)^2$

$$\boxed{\begin{aligned} c_2 &= \sum_{k=0}^{2} 3^k (2-k)^2 = 4+3+0 = 7 \\ c_3 &= \sum_{k=0}^{3} 3^k (3-k)^2 = 9 + 3\cdot 4 + 9 = 30 \end{aligned}}$$

4) $y'(t)+9\int_0^t y(\tau)e^{-6(t-\tau)}\,d\tau = e^t$, $y(0)=1$

$$y'(t)+9\,y(t)*e^{-6t}=e^t$$

$$sY(s)-1+9Y(s)\frac{1}{s+6}=\frac{1}{s-1}$$

$$\frac{s^2+6s+9}{s+6}Y(s)=\frac{s}{s-1}$$

$$s^2+6s+9=(s+3)^2$$

• $$Y(s)=\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}$$

• $$y(t)=\operatorname{res}_1\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}e^{st}+\operatorname{res}_{-3}\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}e^{st}$$

• $$\operatorname{res}_1\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}e^{st}=\frac{1+6}{4^2}e^t=\frac{7}{16}e^t$$

• $$\operatorname{res}_{-3}\frac{(s^2+6s)e^{st}}{(s-1)(s+3)^2}\overset{\text{pol 2. reda}}{=}\lim_{s\to-3}\left(\frac{(s^2+6s)e^{st}}{s-1}\right)'=$$

$$=\lim_{s\to-3}\frac{\left((2s+6)e^{st}+t(s^2+6s)e^{st}\right)(s-1)-(s^2+6s)e^{st}}{(s-1)^2}=$$

$$=\frac{-4t(-9)e^{-3t}+9e^{-3t}}{16}=\frac{9(4t+1)e^{-3t}}{16}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{7}{16}e^t+\frac{9(4t+1)}{16}e^{-3t}}$$

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (09.02.2023)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a} \mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují).

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{(z-i)^4}{(2-i+z)^2}$$

do mocninné řady na maximálním okolí bodu $z_0 = i$ a určete parametry tohoto okolí.

(b) Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-6)^n$$

má poloměr konvergence $R = 3$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 4$?

Úloha 2 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují).

(a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{e^{iz} - i - \cos z}{(1-\sin z)(z - \frac{\pi}{2})}.$$

(b) Určete $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_i \left((z-i) + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^4} + \frac{a}{(z-i)^k} \right) = 5.$$

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují).

(a) Najděte inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = \frac{z-2i}{z^4 + 8z^2 + 16}.$$

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\left(n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2) \right) \right) * (-i)^n \right)_{n=0}^{\infty}.$$

(c) Určete c_2 a c_3 posloupnosti

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (2^n)_{n=0}^{\infty} * (n^3)_{n=0}^{\infty}.$$

Úloha 4 ([10 bodů]). Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}\mathbb{1}(t).$$

[Nápověda: Využijte skutečnosti, že $\mathscr{F}\left[e^{-t}\mathbb{1}(t)\right](\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$.]

1) a) $f(z) = \frac{(z-i)^4}{(2-i+z)^2} = (z-i)^4 \frac{1}{(2-i+z)^2}$

- $\frac{1}{2-i+z} = \frac{1}{2+(z-i)} = \frac{1}{2-(-(z-i))} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(\frac{-(z-i)}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(z-i)}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-i)^n$$

- $\left(\frac{1}{2-i+z}\right)' = -\frac{1}{(2-i+z)^2}$

- $\frac{1}{(2-i+z)^2} = -\left(\frac{1}{2-i+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} n (z-i)^{n-1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z-i)^{n-1}$$

- $\boxed{f(z) = (z-i)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z-i)^{n+3} \quad \text{pro } |z-i|<2, \; z \in U(i,2)}$

$$\left|\frac{-(z-i)}{2}\right| < 1 \iff |z-i| < 2$$

b) $|4-6| = 2 < 3$

Ano, konverguje.

2) a) $1-\sin z = 0 \iff \sin z = 1 \iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$

· Izolované singularity jsou body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

· $$\left(e^{iz}-i-\cos z\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = i-i-0=0$$

$$\left(e^{iz}-i-\cos z\right)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = ie^{iz}+\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -1+1=0$$

$$\left(e^{iz}-i-\cos z\right)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -e^{iz}+\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -i+0\neq 0$$

· Body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, jsou 2-násobné kořeny čitatele.

$$(1-\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0$$

$$\left[(1-\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right]'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = (-\cos z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+1-\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0+1-1=0$$

$$\left[(1-\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right]''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = (\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)-\cos z-\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 2k\pi-0-0 = 2k\pi$$

· Pokud $k\neq 0$, jsou body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 2-násobné kořeny jmenovatele.

Pro $k\neq 0$ jsou tedy body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ odstranitelné singularity.

• Pro $k=0$, tj. $z=\frac{\pi}{2}$, je $\left[(1-\sin z)(z-\frac{\pi}{2})\right]''=0$.

$$\left[(1-\sin z)(\pi-\frac{\pi}{2})\right]'''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=(\cos z)(z-\frac{\pi}{2})+\sin z+\sin z+\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0+1+1+1\neq 0$$

• Bod $\frac{\pi}{2}$ je tedy 3-násobný kořen jmenovatele.

• $\boxed{\text{Bod } \frac{\pi}{2} \text{ je pól řádu } 3-2=1.}$

b) Zvolíme-li $\boxed{k=1}$ platí

$$\operatorname{res}_i\left((z-i)+\frac{3}{(z-i)}+\frac{4}{(z-i)^4}+\frac{a}{(z-i)}\right)=3+a,\text{ tedy } \boxed{a=2}.$$

3) a) $z^4+8z^2+16=(z^2+4)^2=(z-2i)^2(z+2i)^2$

$$F(z)=\frac{1}{(z-2i)(z+2i)^2},\quad z\in U(\infty)$$

$$a_n=\operatorname{res}_{2i}\frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2}+\operatorname{res}_{-2i}\frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2},\quad n\in\mathbb{N}$$

$$\cdot\operatorname{res}_{2i}\frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2}=\frac{(2i)^{n-1}}{(4i)^2}=-\frac{(2i)^{n-1}}{16}$$

$$\cdot\operatorname{res}_{-2i}\frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2}\overset{\text{pól 2. řádu}}{=}\lim_{z\to-2i}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-2i)}\right)'=\lim_{z\to-2i}\frac{(n-1)z^{n-2}(z-2i)-z^{n-1}}{(z-2i)^2}$$

$$=\frac{-4i(n-1)(-2i)^{n-2}-(-2i)^{n-1}}{-16}=$$

$$=\frac{1-2(n-1)}{16}(-2i)^{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&a_n=-\frac{(2i)^{n-1}}{16}+\frac{1-2(n-1)}{16}(-2i)^{n-1}\quad\text{pro } n\in\mathbb{N}\\&a_0=\lim_{z\to\infty}F(z)=0\end{aligned}}$$

b) $$\mathcal{Z}\left[\left(n\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right)*(-i)^n\right](z)=\mathcal{Z}\left[n\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)\cdot\frac{z}{z+i}$$

$$\cdot\ \mathcal{Z}\left[n\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)=-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)$$

$$\cdot\ \mathcal{Z}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)=z^2\frac{z^2}{z^2+1}-1\cdot z^2-0\cdot z=\frac{z^4-z^4-z^2}{z^2+1}=-\frac{z^2}{z^2+1}$$

$$\cdot\ \mathcal{Z}\left[n\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)=-z\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\right)'=z\,\frac{2z(z^2+1)-2zz^2}{(z^2+1)^2}=\frac{2z^2}{(z^2+1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\left(n\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(n+2)\right)\right)*(-i)^n\right](z)=\boxed{\frac{2z^3}{(z^2+1)^2(z+i)}}$$

c) $c_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k (n-k)^3$

$c_2 = \sum_{k=0}^{2} 2^k (2-k)^3 = 8 + 2 + 0 = 10$

$c_3 = \sum_{k=0}^{3} 2^k (3-k)^3 = 27 + 16 + 4 + 0 = 47$

4) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}\,1(t)$

$$-\omega^2\hat{y}(\omega) - 4i\omega\hat{y}(\omega) + 4\hat{y}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$$

$$-(\omega^2 + 4i\omega - 4)\hat{y}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} \qquad \omega^2 + 4i\omega - 4 = (\omega + 2i)^2$$

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}$$

$$y(t) = -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\right](t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\,d\omega$$

$t \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\,d\omega = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{izt}}{(1+iz)(z+2i)^2} = 2\pi i\,\frac{e^{-t}}{i\big|_{z=i}\cdot(3i)^2}$$

$$= 2\pi i\,\frac{e^{-t}}{-9i} = -\frac{2\pi}{9}e^{-t}$$

$t < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2} = -2\pi i \operatorname{res}_{-2i}\frac{e^{izt}}{(1+iz)(z+2i)^2}$$

$$\operatorname{res}_{-2i}\frac{e^{izt}}{(1+iz)(z+2i)^2} \overset{\text{pól 2. řádu}}{=} \lim_{z\to-2i}\left(\frac{e^{izt}}{1+iz}\right)' = \lim_{z\to-2i}\frac{ite^{izt}(1+iz) - ie^{izt}}{(1+iz)^2} =$$

$$= \frac{ite^{2t}(1+2) - ie^{2t}}{3^2} = i\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\,d\omega = 2\pi\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2t}$$

Celkem:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{1}{9}e^{-t} & \dots\ t \geq 0 \\ \left(\frac{1}{9} - \frac{t}{3}\right)e^{2t} & \dots\ t < 0 \end{cases}}$$