Komplexní analýza

Úvod, komplexní čísla

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Základní informace

Stránka předmětu:
https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B0B01KAN

Věnujte pozornost pravidlům předmětu (viz Moodle).

- Podmínky zápočtu upřesní cvičící. Ze semestrálních písemek lze získat až 20 bodů ke zkoušce. Lze si také snížit nutný počet bodů z písemné části.
- Podmínky zkoušky viz Moodle. Včas se dobře seznamte s podmínkami a průběhem zkoušky. Vějte pozornost vzorovým zadáním zkouškové písemky.

Obsah kurzu:

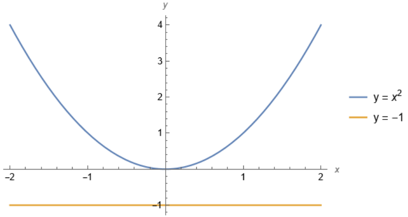
1. Komplexní analýza
2. Transformace (Fourierova transformace, Laplaceova transformace a Z-transformace)

Upozornění

Nezaspěte začátek a nenechte si ujet vlak. Vše na sebe navazuje...

Motivace (řešení algebraických rovnic)

- Všichni víme, že rovnice $x^2 = -1$ nemá v oboru reálných čísel řešení.
- Můžeme sice říct, že řešením je imaginární prvek i splňující $i^2 = -1$, ale to může působit uměle:

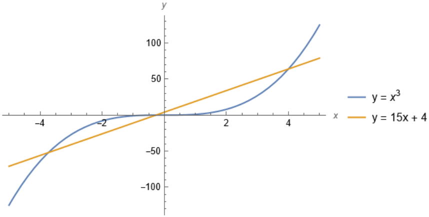


- Co ale např. kubická rovnice $x^3 = 15x + 4$?

- Cardanovy vzorce[1] pro řešení kubické rovnice $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

- Co když $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$? Např. pro $x^3 = 15x + 4$ to nastává, ale:



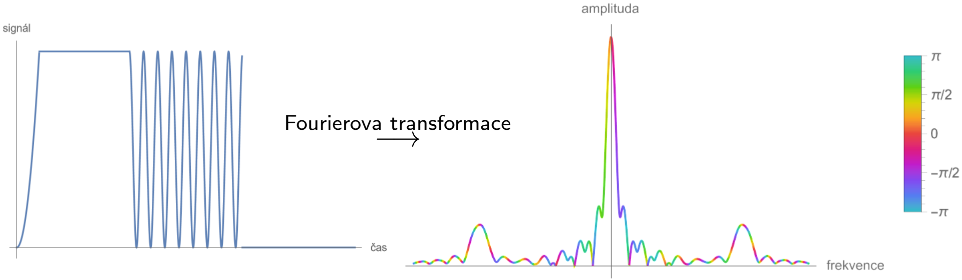
Poučení

Reálné problémy často vyžadují komplexní metody.

[1] Ty se opravdu učit nemusíte.

Otázka

Jak lze aktivně potlačit nežádoucí zvuk?



Komplexní čísla

Definice (neformální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu dvojčlenů $x + yi$, kde x, y jsou reálná čísla, se kterými počítáme jako s reálnými dvojčleny za využití pravidla $i^2 = -1$.
Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

---

*Formální zavedení komplexních čísel pro zájemce ve skriptech.

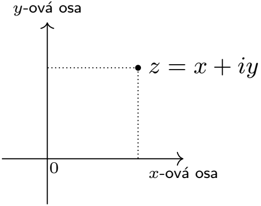
- Prvek i se nazývá **imaginární jednotka**.
- Terminologie a značení:
  - $z = x + iy$. . . **algebraický tvar** komplexního čísla z.
  - x. . . **reálná část** komplexního čísla z. Píšeme $\operatorname{Re} z = x$.
  - y. . . **imaginární část** komplexního čísla z. Píšeme $\operatorname{Im} z = y$.
- Ztotožňujeme $x = x + 0i$ a $i = 1i$.

Upozornění

Reálná i imaginární část komplexního čísla jsou reálná čísla!

Poučení

Reálná a imaginární část komplexního čísla jsou vlastně kartézské souřadnice bodu v rovině.

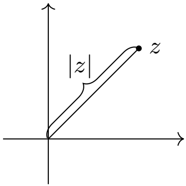


- Komplexní čísla jsou geometricky body v rovině. Na rozdíl od uspořádaných dvojic z $\mathbb{R}^2$ ale umíme komplexní čísla násobit. Tento „drobný detail“, má velmi podstatné důsledky.

Velikost (absolutní hodnota) komplexního čísla

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. **Velikost** (nebo také **absolutní hodnota** či modul) komplexního čísla z je nezáporné reálné číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



- $|z|\ldots$ vzdálenost od počátku
- $|z| = 0$ právě tehdy, když $z = 0$.

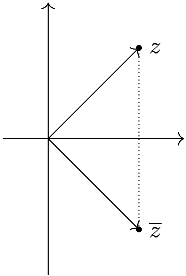
Upozornění

Nedefinujeme uspořádání komplexních čísel! Můžeme porovnávat velikosti komplexních čísel, nikoliv ale komplexní čísla mezi sebou.

Komplexní sdružení

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. **Komplexně sdruženým číslem** k číslu z nazveme číslo $\bar{z} = x - iy$.



- $z \mapsto \bar{z}$... zrcadlení kolem reálné osy
- $|z| = |\bar{z}|$

Příklad

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $z\bar{z} = |z|^2$.

Komplexí čísla a dělení

Otázka

Jak vypadá inverzní prvek $z^{-1} = \frac{1}{z}$ k z vůči násobení?

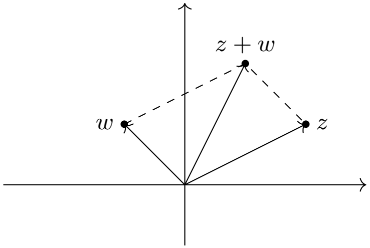
- Inverzní prvek z^{-1} je definován rovností $z^{-1}z = 1$, a proto:
  - pro $z = 0$ inverzní prvek $z^{-1} \in \mathbb{C}$ neexistuje;
  - pro $z \neq 0$ je $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Odtud pro $z \neq 0$ dostaneme $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

Příklad

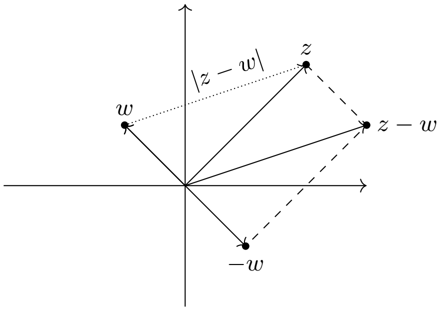
Nechť $z = 5 - i$ a $w = 1 + 2i$. Potom

1. $z - w = 4 - 3i$, $\overline{z - w} = 4 + 3i$ a $|z - w| = 5$;
2. $\frac{z}{w} = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$, $\mathrm{Re}\,\frac{z}{w} = \frac{3}{5}$ a $\mathrm{Im}\,\frac{z}{w} = -\frac{11}{5}$.

Geometrický význam sčítání, vzdálenost komplexních čísel



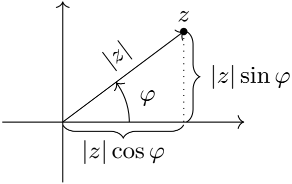
- $z \mapsto z + w$... posun v rovině o vektor $w \in \mathbb{C}$



- $|z - w|$... vzdálenost mezi $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \mathbb{C}$

Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť z je nenulové komplexní číslo.



Z obrázku vidíme, že z odpovídá bodu $(|z|\cos\varphi, |z|\sin\varphi)$ v rovině (vzpomeňte si na polární souřadnice). Máme tedy

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Upozornění

Orientovaný úhel φ není jednoznačný (můžeme obíhat dokola či v opačném směru). Na to budeme často narážet...

Definice

Pro $z \neq 0$ zavádíme následující terminologii a značení:

- $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$... **goniometrický tvar** komplexního čísla z.
- φ... **argument** komplexního čísla z.
- $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$... **množina všech argumentů** komplexního čísla z.
- $\varphi \in (\operatorname{Arg} z) \cap (-\pi, \pi]$ se nazývá **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z a značí se $\arg z$.

Příklad

Ať $z = -1 + i$. Pak $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.

Poučení

$\arg z$ je jednoznačný argument (úhel) z rozsahu $(-\pi, \pi]$ (právě jeden ze všech možných argumentů leží v tomto rozsahu).

Exponenciální tvar komplexního čísla

- Pravděpodobně jste již viděli tvz. Eulerův vzorec:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R}.$$

- S tímto označením lze goniometrický tvar komplexního čísla zapisovat mnohem úsporněji jako:

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

- Budeme mluvit o **exponenciálním tvaru** komplexního čísla $z \neq 0$.

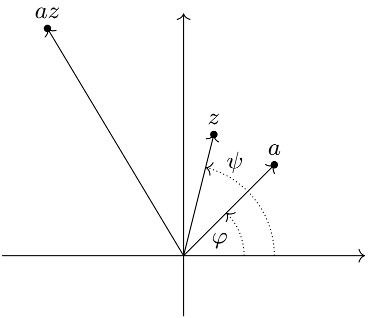
Upozornění

φ výše je reálné číslo a jeho geometrická interpretace je orientovaný úhel.

Geometrický význam násobení

Nechť $a, z \neq 0$.

- $z \mapsto az\ldots$ otočení o úhel φ a poté stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|a|$.



- Speciálně, pokud $|a| = 1$, pak $z \mapsto az$ odpovídá otočení o úhel φ.

Tvrzení (O geometrickém významu násobení)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ jsou nenulová a mějme $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Potom $|zw| = |z||w|$ a $\varphi + \psi \in \operatorname{Arg}(zw)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Tvrzení (O rovnosti komplexních čísel)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ jsou nenulová. Nechť $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Potom $z = w$ právě tehdy, když

$$|z| = |w| \qquad \text{a zároveň} \qquad \psi = \varphi + 2k\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}.$$

Důkaz: Viz cvičení. ■

Upozornění

Dva „náhodně“ vybrané argumenty stejného komplexního čísla se mohou lišit o celočíselný násobek 2π.

Moivreova věta

Důsledkeme geom. významu násobení je tzv. Moivreova věta.

Věta (Moivreova věta)

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Stručněji:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Příklad

Uvažme rovnici $z^4 = -2$. Množina všech jejích řešení je

$$\left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)\right) : k=0,1,2,3\right\}.$$

Stručněji: $\left\{\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)} : k=0,1,2,3\right\}$.

Základní identity

Tvrzení (Základní identity)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Potom

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, kdykoli $w \neq 0$;
5. $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$
6. $|z| = |\overline{z}|$;
7. $|zw| = |z|\,|w|$;
8. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, kdykoliv $w \neq 0$.