Komplexní analýza

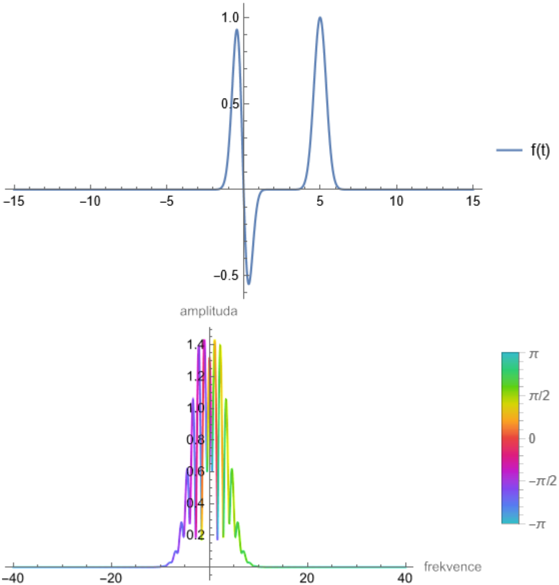
Fourierova transformace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

- Fourierova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$ nám umožňuje rozložit $T > 0$ periodickou funkci (signál) do harmonických kmitů s frekvencemi $\frac{n}{T}$.
- Čím větší je velikost $|c_n|$, tím větší je role frekvence $\frac{n}{T}$.
- Pro obecné (neperiodické) funkce (signály) bychom si pouze s kmity o frekvenci $\frac{n}{T}$ nevystačili, místo toho potřebujeme zkoumat všechny frekvence.
- Fourierova transformace nám (mj.) umožňuje analyzovat neperiodické funkce (signály), obsahuje informace o všech frekvencích.
- Jde o velmi důležitý nástroj s různorodým využitím.
    - kompresní algoritmy, analýza DNA sekvencí, aplikace Shazam (rozpoznávání hudby), snímky noční oblohy (radiová interferometrie), analýza zemětřesení (stavba odolných budov), zobrazovací metody v medicíně (MRI atp.), ...
- Metody Fourierovy transformace nám také umožňují efektivně řešit řadu diferenciálních rovnic.


1.0
0.5
−0.5
−15
−10
−5
5
10
15
f(t)
amplituda
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−40
−20
20
40
frekvence
π
π/2
0
−π/2
−π

Definice, značení, úvodní poznámky

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Fourierova transformace** funkce f je funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t, \ \omega \in \mathbb{R},$$

konverguje-li tento integrál pro každé $\omega \in \mathbb{R}$.
Alternativně budeme také značit

$$\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)\,.$$

Různé zdroje, různé definice.

- Integrály chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Z linearity integrálu plyne $\widehat{f+g}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$ a $\widehat{\alpha f}(\omega) = \alpha\hat{f}(\omega)$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$, existuje-li pravá strana.
- $\hat{f}$ je komplexní funkce reálné proměnné.

Věta (Existence a spojitost Fourierovy transformace)

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutně integrovatelná na $\mathbb{R}$, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty,$$

potom $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existuje a je to spojitá funkce na $\mathbb{R}$.

- Množinu všech absolutně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ budeme značit $L^1(\mathbb{R})$.
- Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, potom platí $\lim_{\omega \to \pm\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$ (tzv. Riemannovo–Lebesgueovo lemma).
- Pro funkce, které nejsou absolutně integrovatelné, je potřeba budovat obecnější (a složitější) teorii. Vše se dá zastřešit pomocí tzv. teorie distribucí.

Příklad

Nechť

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \end{cases}$$

kde $a > 0$. Potom

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2a, & \omega = 0. \end{cases}$$

Příklad

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Příklad (Obraz Gaussovy funkce)

Pro $a > 0$ platí

$$\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Řada způsobů, jak tento obraz určit. Prozatím to vezmeme jako fakt.

Základní pravidla

Tvrzení

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a}\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
2. Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[e^{iat}f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
3. Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+(t-3)^2}\right](\omega) = \pi e^{-3i\omega} e^{-|\omega|}$
2. $\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+(2t-3)^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-3i\frac{\omega}{2}} e^{-\frac{|\omega|}{2}}$
3. $\mathscr{F}\left[\frac{e^{it}}{1+(2t-3)^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3i(\omega-1)}{2}} e^{-\frac{|\omega-1|}{2}}$

Z příkladu na 6. slidu víme, že $\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

Obraz derivace a derivace obrazu

Věta (Derivace obrazu)

Jestliže $f(t)$ a $tf(t)$ leží v $L^1(\mathbb{R})$, pak

$$\mathscr{F}\left[tf(t)\right](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Jest

$$\mathscr{F}\left[te^{-4t^2}\right](\omega) = -\frac{\sqrt{\pi}}{16}\omega i e^{-\frac{\omega^2}{16}}.$$

Vzpomeňme si na důležitý obraz Gaussovy funkce, který jsme viděli na 6. slajdu.

Věta (Obraz derivace)

Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ jsou spojité, pak

$$\mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^n \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'''(t) + 2y''(t) + y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

je

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{e^{-|\omega|}}{iw^3 + 2w^2 - 1}\pi.$$

Z příkladu na 6. slidu víme, že $\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

Otázka

Jak ze znalosti obrazu určíme vzor?

Inverzní Fourierova transformace a věta o inverzi

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Inverzní Fourierova transformace** funkce f je funkce $\check{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t, \ \omega \in \mathbb{R},$$

konverguje-li tento integrál pro každé $\omega \in \mathbb{R}$.
Alternativně budeme také značit

$$\check{f}(\omega) = \mathscr{F}^{-1}\left[f(t)\right](\omega)\,.$$

- Nezáleží na označení proměnných, podstatný je význam.
- Z matematického pohledu je Four. transformace a inverzní Four. transformace prakticky jedno a to samé.

Poučení

Známe-li $\hat{f}$, známe také $\check{f}$ (a obráceně), neboť
$\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) = 2\pi \mathscr{F}^{-1}\left[f(t)\right](-\omega)$.

Věta (Věta o inverzi)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ a také $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Je-li f spojitá v $t \in \mathbb{R}$, potom

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\right](t) \,.$$

- Pro spojité funkce $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ je Fourierova transformace „bezeztrátová“, tj. platí pro ně: pokud $\hat{f} = \hat{g}$, potom $f = g$.

Příklad

1. $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.
2. Diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = -\frac{e^{-|t|}}{2}$$

má řešení

$$y(t) = \frac{1}{4}(1 + |t|)e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R}.$$

První obraz určíme snadno pomocí již známého obrazu z 6. slajdu a věty o inverzi. Nemusíme znovu již nic počítat.

Konvoluce

Definice

Konvoluce funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná pro $t \in \mathbb{R}$ předpisem

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau,$$

konverguje-li tento integrál pro každé $t \in \mathbb{R}$.

- Existuje-li konvoluce $f * g$, pak $f * g = g * f$.
- Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pak také $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
- Internet je plný pěkných vizuálních vysvětlení. Velmi volně, akumulujeme všechny interakce otočeného vstupního signálu g posunutého do požadovaného bodu/času s jádrem/filtrem f.

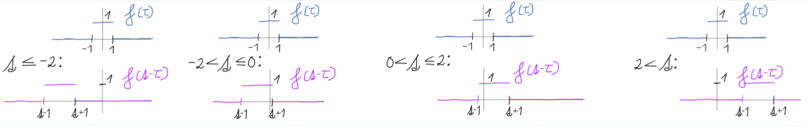
Příklad

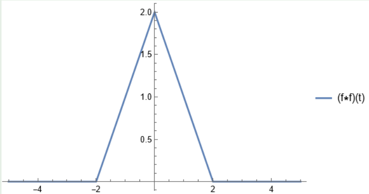
Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1,1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]. \end{cases}$$

Potom

$$(f * f)(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty,-2] \cup (2,\infty), \\ t+2, & t \in (-2,0], \\ 2-t, & t \in (0,2]. \end{cases}$$





Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, potom

$$\mathscr{F}\left[(f * g)(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Příklad

Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\tau^2} y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-\pi t^2}$$

je

$$\hat{y}(\omega) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{i\omega + e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}.$$

Vzpomeňme si na známý obraz Gaussovy funkce z 6. slajdu.

Poučení

Obraz konvoluce je součin obrazů. A stejně to bude i u Laplaceovy a Z transformace.

Souvislost s Fourierovou řadou

Tvrzení

Nechť $f\colon [a, a+T] \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, je absolutně integrovatelná. Nechť f_T značí její rozšíření nulou, tj.

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pokud } t \in [a, a+T], \\ 0, & \text{pokud } t \notin [a, a+T]. \end{cases}$$

Potom pro komplexní Fourierovy koeficienty funkce f platí

$$c_n = \frac{1}{T} \mathscr{F}\left[f_T(t)\right]\left(\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Připomeňme si, že $c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\,\mathrm{d}t$.

Příklad

Komplexní Fourierovy koeficienty funkce $f\colon [-2,2] \to \mathbb{C}$ definované jako

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1,1], \\ 0, & t \in [-2,2] \setminus [-1,1], \end{cases}$$

jsou

$$c_n = \begin{cases} 4\frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}, & \text{pro } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 2, & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

Její komplexní Fourierova řada tedy je

$$2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} 4\frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} e^{i\frac{\pi n}{2}t}.$$

Vzpomeňme si na 1. příklad z 6. slidu.