Komplexní analýza

Laplaceova transformace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

- Diferenciální rovnice, typicky s počátečními podmínkami (na rozdíl od Fourierovy transformace).
    - O její rozšíření v podobě, kterou vídáme dodnes, se postaral zejména Gustav Doetsch (1882–1977).

Definice

Laplaceova transformace funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je funkce $\mathscr{L}[f] = F$ definovaná pro $s \in \mathbb{C}$ předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

konverguje-li tento integrál pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

- $\mathscr{L}[f]$ je komplexní funkce komplexní proměnné.
- Z linearity integrálu plyne $\mathscr{L}[f+g] = \mathscr{L}[f] + \mathscr{L}[g]$ a $\mathscr{L}[\alpha f] = \alpha\mathscr{L}[f]$, kdykoliv existuje pravá strana.

Příklad

1. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Potom $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
2. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
3. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je
$$\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{a} \quad \mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

- Máme-li funkci $f(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, relevantní je pouze její chování na $[0,\infty)$.

Definice

Funkce $\mathbb{1}(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako
$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } t \geq 0, \\ 0, & \text{pokud } t < 0, \end{cases}$$
se nazývá **Heavisideova funkce**. Někdy též jednotkový skok (v 0).

- Funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ztotožňujeme s $f \cdot \mathbb{1}$ a také $f \restriction_{[0,\infty)}$.

Existence Laplaceovy transformace, prostor L_0

- Uvidíme, že Laplaceova transformace existuje pro velkou třídu funkcí.

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je **po částech spojitá na intervalu** $[0,\infty)$, jestliže existují nepřekrývající se uzavřené intervaly $[a_j, b_j] \subseteq [0,\infty)$ takové, že $[0,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$ a:

- f je spojitá na každém otevřeném intervalu (a_j, b_j);
- $f(a_j^+) = \lim_{t\to a_j^+} f(t)$ existuje vlastní ve všech a_j, $f(b_j^-) = \lim_{t\to b_j^-} f(t)$ existuje vlastní ve všech b_j.

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je **nejvýše exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ takové, že $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ pro každé $t \in [0,\infty)$.
Číslo α nazýváme **index růstu** funkce f.

Definice

Množinu všech po částech spojitých funkcí $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$, které jsou nejvýše exponenciálního řádu, budeme značit symbolem L_0.

- Je-li $f, g \in L_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak také $f+g, \alpha f, f \cdot g \in L_0$.

Příklad

1. Všechny omezené po částech spojité funkce na $[0,\infty)$ jsou v L_0. Speciálně tedy konstantní funkce a funkce $\sin t$ a $\cos t$.
2. Všechny polynomy jsou v L_0.
3. $e^{at} \in L_0$ pro každé $a \in \mathbb{C}$.
4. e^{t^2} či $\frac{1}{t}$ nejsou v L_0.

Věta (O existenci Laplaceovy transformace)

Jestliže $f \in L_0$ má index růstu α, pak její Laplaceův obraz $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$ existuje a je to holomorfní funkce v pravé polorovině $\operatorname{Re} s > \alpha$. Navíc $\lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ s\in\mathbb{R}}} F(s) = 0$.

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Tvrzení

Nechť $f \in L_0$.

1. Pro $a > 0$ platí $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.
2. Pro $a \in \mathbb{C}$ platí $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.

Důkaz je užitečné cvičení; provede se analogicky jako u Four. transformace.

Příklad

$$\mathscr{L}\left[e^{-3it}\sin 2t\right](s) = \frac{2}{(s+3i)^2+4}.$$

Viz příklad 3 na 3. slajdu.

Otázka

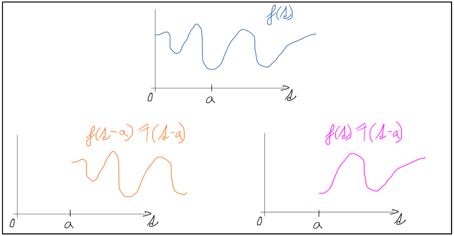
Jak je to s posunem vzoru?

Tvrzení

Nechť $f \in L_0$.

1. Pro $a > 0$ platí $\mathscr{L}\left[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$.
2. Pro $a > 0$ platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbb{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■



- Pravidlo 1 odpovídá posunu vzoru, zatímco pravidlo 2 odpovídá „uříznutí vzoru“.

Příklad

1. $\mathscr{L}\left[\cos(2t - \frac{\pi}{3})\mathbb{1}(t - \frac{\pi}{6})\right](s) = \frac{s}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{6}s}$
2. $\mathscr{L}\left[e^t\mathbb{1}(t-2)\right](s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}$.

Obraz derivace a derivace obrazu

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f \in L_0$, pak
$$\mathscr{L}\left[tf(t)\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

Pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Věta (O obrazu derivace)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f, f', \ldots, f^{(n-1)} \in L_0$ jsou spojité a $f^{(n)}$ je po částech spojitá. Potom platí
$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathscr{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Poučení

$$\mathscr{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$$
$$\mathscr{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathscr{L}[f'''(t)](s) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

A tak dále...

Příklad

Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice $y''(t) + y(t) = 1$ s počátečními podmínky $y(0) = 2$ a $y'(0) = 3$ je
$Y(s) = \frac{2s^2+3s+1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}.$

V tomto jednoduchém případě můžeme snadno určit vzor ze známých obrazů.

Hledání vzoru

- Mějme $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = F(s)$, kde $f \in L_0$ má index růstu α.

Otázka

Jak ze znalosti obrazu zjistíme vzor?

- Je-li navíc f spojitá s po částech spojitou derivací, potom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to+\infty} \int_{L_y} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s,$$

  kde L_y je vertikální úsečka s parametrizací $\varphi(t) = x + it$, $t \in [-y, y]$, $x > \alpha$ libovolné.
  - Je-li i f pouze po částech spojitá, potom je třeba $f(t)$ nahradit $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$.
- Tento vztah se nazývá Mellinův inverzní vzorec. Integrál na pravé straně můžeme často spočítat za využití reziduové věty.
- Důležité bylo, že jsme a priori věděli, že $F(s)$ je Laplaceovým obrazem nějaké funkce z L_0.

Definice

Nechť $F(s)$ je holomorfní funkce v pravé polorovině $\mathrm{Re}\, s > \alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f \in L_0$ je **Laplaceův vzor** funkce F, jestliže $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = F(s)$ pro $\mathrm{Re}\, s > \alpha$.

- Předefinujeme-li $f(t)$ v konečně mnoha bodech, její Laplaceův obraz se nezmění. Vzor tedy není jednoznačný.

Věta (Lerchova věta)

Nechť $f, g \in L_0$ jsou zprava spojité na $[0, \infty)$ a mají stejný Laplaceův obraz. Potom $f = g$.

- Laplaceova transformace je pro zprava spojité funkce z L_0 „bezeztrátová“.
- Je-li Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s)$ spojitý zprava, budeme psát $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)$.

Příklad

1. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-5}](t) = e^{5t}$
2. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^4}](t) = \frac{t^3}{6}$

Viz Laplaceovy obrazy na 3. a 8. slajdu.

Poučení

Známe-li nějaké obrazy, známe také nějaké vzory.

Tvrzení (Laplaceův vzor racionální funkce)

Nechť $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ je racionální funkce taková, že $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$. Nechť $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ jsou všechny póly funkce $F(s)$. Potom

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{s=z_k} F(s)e^{st}$$

pro každé $t \in [0, \infty)$.

Příklad

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)^2}\right](t) = \frac{1}{4} - \frac{2t+1}{4}e^{-2t}$$

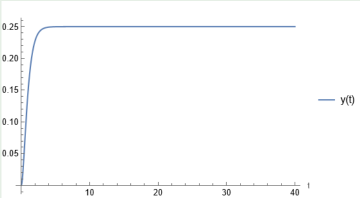
Příklad

Řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + 2y'(t) = e^{-2t}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = y'(0) = 0$ je

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{2t+1}{4}e^{-2t}.$$



K zjištění, že se řešení ustaluje u hodnoty $\frac{1}{4}$, stačí znalost obrazu (uvidíme).

Otázka

Jak vypadá Laplaceův vzor k funkci $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$?

Upozornění

Chybné použití metody sčítání reziduí (např.) na funkci $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$ dává chybný vzor $f(t) = t - 1$. Správně ovšem je $f(t) = (t-1)\mathbb{1}(t-1)\dots$

Poučení

Hledáme-li vzor k funkci $F(s) = G(s)e^{-as}$, kde $a > 0$, nejprve najdeme vzor $g(t)$ k funkci $G(s)$. Hledaný vzor $f(t)$ potom je $f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a)$, což plyne z pravidla o posunu vzoru.

1. pravidlo na 7. slajdu.

Příklad

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s(s+2)^2}\right](t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{2(t-5)+1}{4}e^{-2(t-5)}\right)\mathbb{1}(t-5)$$

Konvoluce

Definice

Nechť $f, g \in L_0$. **Konvoluce** funkcí f a g je funkce $(f * g)\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

- Jsou-li $f, g \in L_0$, pak také $(f * g) \in L_0$ a $\max\{\alpha, \beta\}$, kde α je index růstu f a β je index růstu g, je index růstu $f * g$.
- Konvoluce je komutativní, tj. $f * g = g * f$.
- Při ztotožnění f a g s $f \cdot \mathbb{1}$ a $g \cdot \mathbb{1}$ se jedná konvoluci tak, jak jsme ji viděli u Fourierovy transformace.

Věta (O obrazu konvoluce)

Nechť $f, g \in L_0$. Platí

$$\mathscr{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\, \mathscr{L}\left[g(t)\right](s).$$

Příklad

- $\mathscr{L}\left[t^n * \mathbb{1}(t)\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+2}}$
- $\mathscr{L}\left[t * e^t\right](s) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2(s-1)}$.

Příklad

Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$. Uvažme integrodiferenciální rovnici

$$y'(t) = \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$. Tato úloha má pro $t \geq 0$ řešení

$$y(t) = y_0 + \frac{y_0}{2}t^2.$$

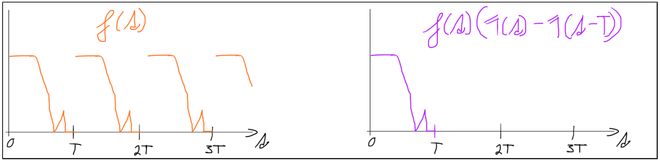
- Funkce $\mathbb{1}(t)$ *není* jednotkový prvek operátoru konvoluce, jak by značení mohlo *mylně* evokovat. Např. $\mathbb{1}(t) * \mathbb{1}(t) = t\mathbb{1}(t)$.

Laplaceův obraz periodické funkce

Věta (O obrazu periodické funkce)

Nechť $f \in L_0$ je periodická na intervalu $[0, \infty)$ s periodou $T > 0$. Potom

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}$$
$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \mathscr{L}\left[f(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t - T))\right](s)\,.$$



Poučení

Hledáme-li Lap. obraz $T > 0$ periodické funkce, najdeme obraz „generující periody“ a podělíme ho faktorem $1 - e^{-sT}$.

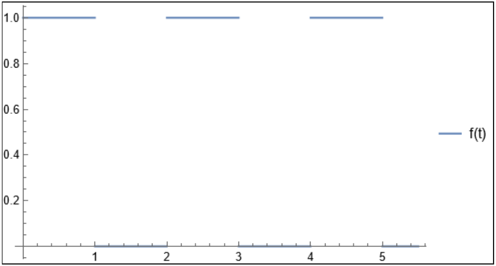
Příklad

Uvažme $T = 2$ periodickou funkci $f(t)$, která je na intervalu $[0, 2)$ dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{pro } t \in [1, 2). \end{cases}$$

Potom

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s\left(1 - e^{-2s}\right)}.$$



O počáteční a koncové hodnotě

Otázka

Mějme obraz řešení dif. rovnice $Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$. Aniž bychom hledali řešení, jaká je počáteční hodnota řešení $y(0)$ a k jaké hodnotě se řešení ustaluje (pokud vůbec)?

Věta (O počáteční a koncové hodnotě)

Nechť $f(t) \in L_0$.

1. Platí $f(0^+) = \lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ s\in\mathbb{R}}} sF(s)$.
2. Leží-li všechny póly $F(s)$ v levé polorovině $\operatorname{Re} s < 0$ nebo v počátku, potom $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{\substack{s\to 0^+ \\ s\in\mathbb{R}}} sF(s)$.

- Odpověď na otázku tedy je $y(0) = 0$ a $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{4}$.
- Porovnejte to s řešením dif. rovnice na 13. slajdu (zadaný obraz je obrazem oné rovnice).

- Další častý typ funkce, na který lze úspěšně aplikovat metodu „sčítání reziduí“.

Tvrzení (Laplaceův vzor funkce $\frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}$)

Nechť $T > 0$ a $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}$, kde P, Q jsou polynomy splňující $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$. Označme $z_k = \frac{2k\pi i}{T}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a nechť $w_1, \ldots, w_n$ jsou všechny kořeny polynomu Q, které nejsou mezi z_k. Potom funkce

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{s=w_j} F(s)e^{st} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{res}_{s=z_k} F(s)e^{st}$$

je Laplaceovým vzorem funkce $F(s)$.

Příklad

Ať $F(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$. Laplaceův vzor k této funkci je

$$f(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2k\pi it}}{2k\pi i + 1}.$$