Komplexní analýza

Z-transformace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Z-transformace

- Diskrétní analogie Laplaceovy transformace umožňující využití metod (komplexní) analýzy pro řešení diskrétních problémů.
- Základní idea známá již Laplaceovi, „znovu objevena“ W. Hurewiczem a dalšími během/po 2. světové válce v souvislosti s řídícím systémem radaru.

Definice

$\boldsymbol{Z}$**-transformace** posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je funkce $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = F(z)$ definovaná jako

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \ \ z \in U(\infty),$$

konverguje-li tato Laurentova řada na okolí ∞.

- Z-transformace posloupnosti je komplexní funkce komplexní proměnné definovaná na (maximálním) okolí ∞.
- Z linearity řad plyne $\mathscr{Z}\left[\alpha a_n\right](z) = \alpha \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)$ a $\mathscr{Z}\left[a_n + b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) + \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$, existuje-li pravá strana.

Příklad

1. Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ platí
$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$$
pro $|z| > |\alpha|$. Speciálně:
$$\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$$
pro $|z| > 1$.
2. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ platí
$$\mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
$$\mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
pro $|z| > e^{|\mathrm{Im}\,\omega|}$.
3. Jest
$$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z) = e^{\frac{1}{z}}$$
pro $|z| > 0$.

Existence Z-transformace, prostor Z_0

Definice

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je **nejvýše exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ takové, že $|a_n| \leq Me^{\alpha n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
Množinu všech komplexních posloupností, které jsou nejvýše exponenciálního řádu, značíme symbolem Z_0.

- Jsou-li $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak také $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}, (\alpha a_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

Příklad

1. Každá omezená posloupnost je v Z_0.
2. Je-li $k \in \mathbb{N}_0$, pak $(n^k)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$. Tedy také $(P(n))_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ pro každý polynom P.
3. $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$ nebo $(n^n)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.

Věta (O existenci Z-transformace)

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel existuje právě tehdy, když $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.
Existuje-li, je $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z)$ holomorfní funkce na okolí ∞ s vlastní limitou v ∞.

- Jsou-li $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ různé posloupnosti, jsou jejich Z-transformace také různé.
- Z-transformace je tedy „bezeztrátová".
- Přirozená otázka (na kterou si odpovíme později):

Otázka

Je každá holomorfní funkce na okolí ∞ s vlastní limitou v ∞ Z-transformace nějaké posloupnosti ze Z_0?

Tvrzení (O škálování vzoru)

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jest

$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathscr{Z}\left[3^n \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right](z) = \frac{3z}{z^2+9}$$

Viz příklad 2 na 3. slajdu.

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, pak

$$\mathscr{Z}\left[na_n\right](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}\left[a_n\right](z)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

1. $$\mathscr{Z}\left[ni^n\right](z) = \frac{iz}{(z-i)^2}.$$

2. $$\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

- Diskrétní analogií derivace jsou diference, např. $a_{n+1} - a_n$.

Věta (O obrazu posunuté posloupnosti, posun vlevo)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $k \in \mathbb{N}$, pak

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left[a_{n+k}\right](z) &= z^k \left(\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \ldots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) \\ &= z^k \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - \ldots - a_{k-1} z. \end{aligned}$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Poučení

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left[a_{n+1}\right](z) &= zF(z) - a_0 z \\ \mathscr{Z}\left[a_{n+2}\right](z) &= z^2 F(z) - a_0 z^2 - a_1 z \\ \mathscr{Z}\left[a_{n+3}\right](z) &= z^3 F(z) - a_0 z^3 - a_1 z^2 - a_2 z \end{aligned}$$

A tak dále...

Příklad

$$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{(n+2)!}\right](z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} - z^2 - z.$$

Příklad

Obraz řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 1$ a $y_1 = 2$ je

$$Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

- V tomto jednoduchém případě můžeme snadno vzor „uhádnout“ (viz příklad 1 na 3. slajdu).

Příklad

Řešení diferenční rovnice výše je

$$y_n = 2^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Inverzní Z-transformace

Definice

Množinu všech holomorfních funkcí na (maximálním možném) okolí ∞ s konečnou limitou v ∞ budeme značit H_∞.

- Každou funkci $F(z) \in H_\infty$ lze rozvinout do Laurentovy řady $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \ z \in U(\infty)$.

Věta (O existenci vzoru)

Ke každé funkci $F \in H_\infty$ existuje posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ taková, že $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = F(z)$.

Odpověď na otázku z 5. slajdu je tedy „ano“. Kombinací s větou o existenci Z-transformace dostáváme, že Z-transformace je (lineární) bijekce mezi Z_0 a H_∞.

Definice

Inverzní Z-transformace funkce $F \in H_\infty$ je posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ taková, že $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = F(z)$.
Budeme značit $a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n)$.

Příklad

1. Inverzní Z-transformace funkce $F(z) = \frac{z}{2+z^3}$ je

$$a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{2+z^3}\right](n) = \begin{cases} (-2)^k & \text{pokud } n = 3k+2 \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

tj.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 0, 1, 0, 0, -2, 0, 0, 4, 0, 0, -8, 0, \dots).$$

2. Inverzní Z-transformace funkce $F(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ je

$$a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right](n) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{pokud } n = 2k \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

tj.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{1!}, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, -\frac{1}{6!}, 0, \frac{1}{8!}, 0, \dots\right).$$

- Další možností je využít integrálního vyjádření koeficientů v Laurentově rozvoji.
- Mějme $F(z) \in H_\infty$ a uvažme její Laurentův rozvoj na okolí ∞, tj. $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},\ z \in U(\infty)$. Koeficienty $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, což je hledaná inverzní Z-transformace funkce $F(z)$, mají integrální vyjádření

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

kde C je (libovolná) kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $U(\infty)$, kde je $F(z)$ holomorfní.
- Tento integrál lze spočítat za využití reziduové věty, jsou-li splněny její předpoklady.
- Reziduovou větu lze použít např. je-li $F \in H_\infty$ holomorfní na $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit. Speciálně tedy v případě racionálních funkcí $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P$.

Tvrzení (Inverzní Z-transformace metodou reziduí)

Nechť $F \in H_\infty$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit. Potom pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} F(z) z^{n-1},$$

kde z_j jsou všechny izolované singularity funkce $F(z)z^{n-1}$.

Příklad

Inverzní Z-transformace funkce

$$F(z) = \frac{z}{(z-2)(z+3)^2}$$

je

$$a_n = \frac{2^n}{25} + \frac{5n-3}{75}(-3)^n, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

- Používáme-li metodu reziduí, někdy je potřeba prvních pár koeficientů inverzní Z-transformace určit zvlášť. Ukážeme si to na typickém příkladu nultého člen a_0.

Příklad

Inverzní Z-transformace funkce $F(z) = \frac{z-3}{z-4}$ je

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 1, \\ a_n &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = 4^{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Faktor $z^{n-1}|_{n=0} = z^{-1}$ nám zde vyrobí neodstranitelnou singularitu v 0, která se pro $n \geq 1$ již nevyskytuje.

- Existují také jisté limitní vzorečky pro inverzní Z-transformaci. Speciálně pro a_0 je velmi jednoduchý, a to

$$a_0 = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

- Často nás ovšem a_0 ani nezajímá. Např. proto, protože a_0 už vstupně víme (počáteční podmínka úlohy).

Konvoluce

Definice

Konvoluce posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž koeficienty jsou definovány jako

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

- Občas budeme krátce psát $c_n = a_n * b_n$.
- Jedná se o diskrétní analogii konvoluce, kterou jsme již viděli u Laplaceovy transformace.

Příklad

Pro každou $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ platí

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n=0}^{\infty} * (1,0,0,0,0,\dots) &= (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \\
(a_n)_{n=0}^{\infty} * (0,1,0,0,0,\dots) &= (0, a_0, a_1, a_2, \dots) \\
(a_n)_{n=0}^{\infty} * (0,0,1,0,0,\dots) &= (0, 0, a_0, a_1, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, potom $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a platí

$$\mathscr{Z}\left[a_n * b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)\, \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)\,.$$

Příklad

Řešení $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ úlohy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 3^{n-k} = 4^n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0$$

je

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 1, \\ a_n &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = 4^{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Viz příklad na 14. slajdu.