Komplexní analýza

Elementární funkce

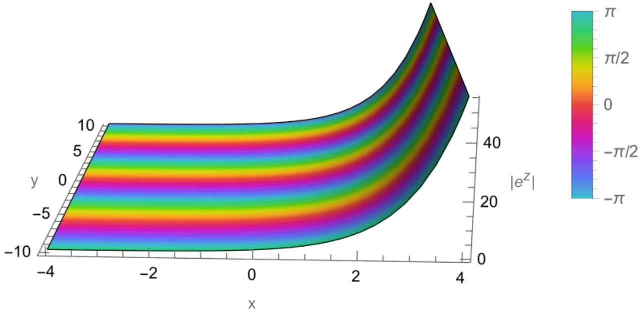
Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Exponenciála

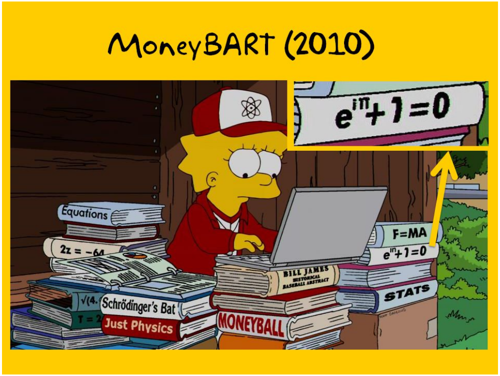
Definice

Komplexní funkce $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se nazývá **exponenciální funkce** (krátce **exponenciála**).



Příklad

$\mathrm{Re}\,(e^{5+4i}) = e^5 \cos 4,\ \mathrm{Im}\,(e^{5+4i}) = e^5 \sin 4$ a $|e^{5+4i}| = e^5$.



- Eulerova identita:
  $e^{i\pi} + 1 = 0$

Tvrzení

Pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí

1. $e^{z+w} = e^z e^w$;
2. $|e^z| = e^x$, kde $x = \operatorname{Re} z$;
3. $e^z \neq 0$;
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
5. Pro $n \in \mathbb{Z}$ platí $(e^z)^n = e^{nz}$;
6. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
7. $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: Viz cvičení. ■

Upozornění

Zatímco v reálném oboru je exponenciála prostá funkce,
v komplexním oboru je periodická!

Tvrzení

Exponenciála je celistvá funkce a platí $(e^z)' = e^z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

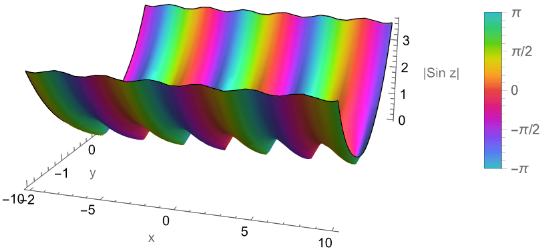
- Z Eulerova vzorce pro $x \in \mathbb{R}$ plyne

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

- Tím je motivována definice goniometrických funkcí v komplexním oboru.

Definice

Komplexní funkce $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá **sinus**.
Komplexní funkce $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá **kosinus**.



Příklad

$\cos(2i) = \frac{e^{-2}+e^{2}}{2}$ a $|\cos(2i)| > 3$.

Tvrzení

- $\sin z = 0$ právě tehdy, když $z = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos z = 0$ právě tehdy, když $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
- $(\sin z)' = \cos z$ a $(\cos z)' = -\sin z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Obecněji, množina řešení rovnice $\sin z = a$, kde $a \in [-1, 1]$, v komplexním oboru je stejná jako v reálném oboru. Stejně pro $\cos z = a$.
- Platí analogické identity jako v reálném případě ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, součtové vzorce, . . .).
- Obdobně jako v reálném případě můžeme definovat funkce tangens a kotangens.

Logaritmus

Příklad

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Komplexní číslo w je řešením rovnice $e^w = z$ právě tehdy, když $w = \ln|z| + i\varphi$ pro $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Definice

Komplexní funkci $\ln z$ definovanou pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jako $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ nazýváme **hlavní hodnotou logaritmu**.

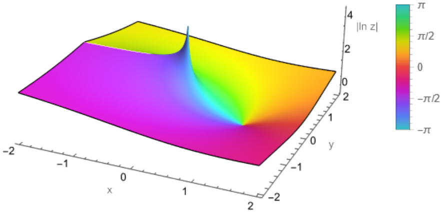
- Podobně jako jsme měli hlavní hodnotu argumentu a množinu všech argumentů, máme hlavní hodnotu logaritmu a mohli bychom zavést množinu všech logaritmů čísla $z \neq 0$ jako
$$\operatorname{Ln} z = \{\ln z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$
- Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme obvykle říkat pouze „logaritmus“ místo hlavní hodnoty logaritmu.

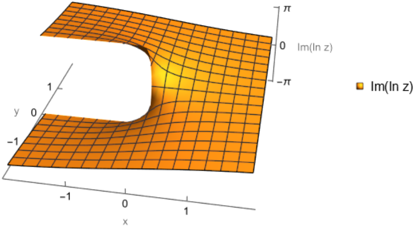
Příklad

$\ln(1) = 0$, $\ln(-1) = i\pi$, $\ln(i) = i\frac{\pi}{2}$.

Upozornění

Funkce $\ln z$ není spojitá v žádném bodě množiny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. Tím spíše ani diferencovatelná.





Tvrzení

Komplexní funkce $\ln z$ je holomorfní na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$

a pro každé $z \in \Omega$ platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Pozor na logaritmus

Příklad

Pro $z = w = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ je $\ln(zw) = -\frac{i\pi}{2} \neq \frac{3i\pi}{2} = \ln z + \ln w$.

Upozornění

Obecně neplatí $\ln(zw) = \ln z + \ln w$, ani $\ln(z^n) = n\ln(z)$.
Vzorečky pro logaritmus, které znáte z reálné analýzy, tedy nepoužívejte, nejedná-li se o kladná reálná čísla.

Příklad

$\ln\left(e^{2\pi i}\right) = 0 \neq 2\pi i$.

Upozornění

Platí $e^{\ln z} = z$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale obecně neplatí $\ln e^z = z$.