Komplexní analýza

Mocninné řady

Zdeněk Mihula

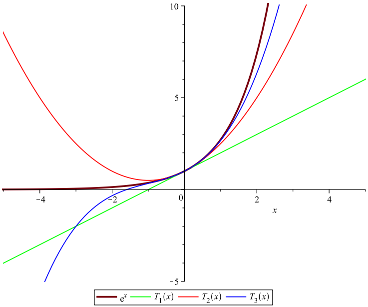
Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

- Z reálné analýzy víme, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} T_n(x), \ x \in \mathbb{R},$$

kde $T_n(x)$ je (tzv. Taylorův) polynom

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

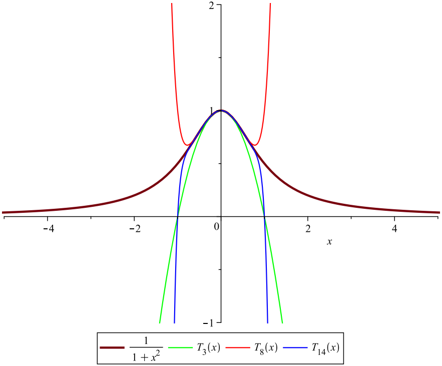


- Čím vyšší stupeň, tím lepší aproximace a na větším okolí 0.
- Ne vždy je to ale takto pěkné. . .

- Zkusme nahradit funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, jejím Taylorovo polynomem $T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.
- Pro jaké hodnoty $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n(x)?$$

- Z obrázku vidíme, že na celém $\mathbb{R}$ asi ne. Dá se ukázat, že to platí jen pro $x \in (-1, 1)$.



- Kde je problém? Čím se liší e^x a $\frac{1}{1+x^2}$?
- Obě funkce jsou nekonečně diferencovatelné na $\mathbb{R}$...

Mocninné řady – základní definice

Definice

Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde $z \in \mathbb{C}$ je komplexní proměnná, se nazývá **mocninná řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

- z_0 ... **střed mocninné řady**
- Čísla a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty mocninné řady**.
- Formálně se jedná o nekonečný polynom
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$
- Pro každé pevné $z \in \mathbb{C}$ je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ číselná řada komplexních čísel. Přirozená otázka potom je, kdy (tj. pro jaké $z \in \mathbb{C}$) takový nekonečný součet čísel „dává smysl“.

- Pojmy jako součet, (absolutní) konvergence, divergence atp. jsou pro číselné řady v komplexním oboru stejné jako v reálném oboru.
- Mějme číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.
  Základní pojmy:
  - $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \ldots$ **n-tý částečný součet** řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.
  - $(s_n)_{n=0}^{\infty} \ldots$ **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Definice

1. Má-li posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ limitu $s \in \mathbb{C}$, tak její hodnotu nazýváme **součet řady** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.
2. Říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **konverguje**, jestliže existuje její součet. V opačném případě říkáme, že řada **diverguje**.
3. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$, potom říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **konverguje absolutně**.

- Jestliže řada konverguje absolutně, potom konverguje.
- Absolutní konvergence je „výrazně lepší“ způsob konvergence.

- Znovu si připomeňme, že dosadíme-li do mocninné řady nějaké pevné $z \in \mathbb{C}$, vznikne nám číselná řada.
- Mocninná řada nám tedy vlastně definuje komplexní funkci, která je definovaná pro ty $z \in \mathbb{C}$, pro které vzniklá číselná řada konverguje (tj. má součet).

Definice

Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje v každém bodě množiny $M \subseteq \mathbb{C}$, pak jejím **součtem na** M rozumíme funkci $f(z)$ definovanou předpisem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in M.$$

- Připomeňme, že $z^0 = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Speciálně $0^0 = 1$.
- Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ vždy konverguje ve svém středu $z = z_0$.

Obor konvergence mocninných řad

Otázka

Existuje nějaký řád a pořádek v tom, kde konverguje mocninná řada? Nebo je to zcela „náhodné“?

Příklad (Geometrická řada)

Je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

1. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverguje absolutně a platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
2. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverguje.

- Geometrická řada, což je mocninná řada se středem $z_0 = 0$, tedy konverguje absolutně uvnitř kruhu se středem $z_0 = 0$ (a poloměrem 1) a diverguje vně. To není náhoda…

Poloměr konvergence a kruh konvergence

Věta (O poloměru konvergence mocninné řady)

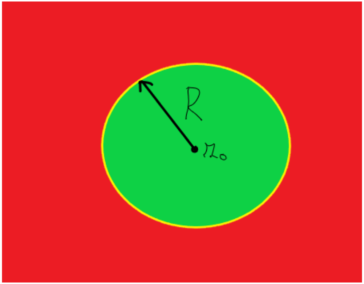
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada. Existuje právě jedno $R \in [0, +\infty]$ takové, že současně platí:

- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje absolutně na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$;
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > R\}$.

Definice

Číslo R nazýváme **poloměr konvergence** mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Množinu $U(z_0, R)$ nazýváme **kruh konvergence** mocninné řady.

- Je-li $R \in (0, \infty)$, mocninná řada konverguje absolutně na kruhu $U(z_0, R)$, „něco" se děje na hraniční kružnici a diverguje vně.



absolutně konverguje, diverguje, obecně nelze rozhodnout (nebudeme vyšetřovat).

- Je-li $R = +\infty$, mocninná řada absolutně konverguje všude na $\mathbb{C}$. Tedy „zelená je celá komplexní rovina".
- Je-li $R = 0$, mocninná řada diverguje všude na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Tedy „červené je vše kromě středu z_0".

- Často jsou mocninné řady v „nekanonickém tvaru“. Např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z-5)^{2n} = (z-5)^2 + 4(z-5)^4 + 9(z-5)^6 + \cdots .$$

Tato řada má (rozepsáný) kanonický tvar

$$0+0(z-5)+(z-5)^2+0(z-5)^3+4(z-5)^4+0(z-5)^5+9(z-5)^6+\cdots$$

Příklad

Mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z+1)^{2n}}{3^n}$ má střed $z_0 = -1$ a poloměr konvergence $R = \sqrt{3}$. Její součet $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z+1)^{2n}}{3^n}$ na kruhu konvergence je $f(z) = \frac{3}{3+(z+1)^2}$ pro $|z+1| < \sqrt{3}$.

Otázka

Mocninné řady jsou na svém kruhu konvergence vlastně „nekonečné polynomy“. Co vše s nimi můžeme dělat jako s polynomy?

Operace s mocninnými řadami

Tvrzení (mocninné řady sčítáme jako polynomy)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence R_1 a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence R_2. Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence alespoň $R=\min\{R_1,R_2\}$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

- Pokud $R_1\neq R_2$, pak má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ poloměr konvergence právě $R=\min\{R_1,R_2\}$.
- Mocninné řady můžeme na jejich kruhu konvergence také násobit jako polynomy.

Věta (Derivování člen po členu)

Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ poloměr konvergence $R>0$.

1. Její součet $f(z)$ je holomorfní funkce na $U(z_0,R)$ a platí $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ na $U(z_0,R)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ má opět poloměr konvergence R.
3. Koeficienty a_n splňují $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro každé $n\in\mathbb{N}_0$.

Věta (Integrování člen po členu)

Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ poloměr konvergence $R>0$ a $f(z)$ je její součet na $U(z_0,R)$.

1. Funkce $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, $z\in U(z_0,R)$, je primitivní funkce k funkci $f(z)$ na $U(z_0,R)$, tj. $F'(z)=f(z)$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ má opět poloměr konvergence R.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

1. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ má součet $\frac{1}{(1-z)^2}$ pro $|z| < 1$.
2. Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ má součet $-\ln(1-z)$ pro $|z| < 1$.

Poučení

Mocninné řady se derivují a integrují stejně jako polynomy člen po členu.

Rozvoj holomorfní funkce do mocninné řady

Věta (Existence rozvoje do mocninné řady)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f(z)$ je holomorfní funkce na Ω. Nechť $z_0 \in \Omega$ a $R \in (0, +\infty]$ je takové, že $U(z_0, R) \subseteq \Omega$. Potom pro všechna $z \in U(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ se nazývá **Taylorova řada** funkce f se středem z_0.

Příklad

Hledejme rozvoj zadané funkce do mocninné řady se středem v z_0.

1. $\frac{1}{1+z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ pro $|z| < 1$, zde $z_0 = 0$.
2. $\frac{1}{(2+z)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}} n(z-3)^{n-1}$ pro $|z - 3| < 5$, zde $z_0 = 3$.

Příklad

1. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pro $|z| < 1$.
2. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
3. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
4. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
5. $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.