Komplexní analýza

Laurentovy řady a izolované singularity

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

Uvažme funkci $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$, která je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$.

- Funkci $f(z)$ nelze rozvinout do *mocninné řady* se středem $z_0 \in \{0, 2\}$, byť okolo bodů 0 a 2 je její chování nejzajímavější.
- Situace se změní, pokud si umožníme záporné exponenty a jiné obory konvergence než kruhy.
- Např.

$$\frac{1}{z(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \frac{z^2}{16} + \cdots \quad \text{pro } 0 < |z| < 2$$

nebo

$$\frac{1}{z(2-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} - \frac{4}{z^4} - \cdots \quad \text{pro } |z| > 2.$$

- Později uvidíme, že takové rozvoje jsou důležité (reziduová věta, inverzní Z-transformace, …).

Laurentovy řady

Definice

- Řada tvaru
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$
kde $z \in \mathbb{C}$ je komplexní proměnná, se nazývá **Laurentova řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.
- Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá **regulární část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
- Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá **hlavní část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

- z_0 ... **střed Laurentovy řady**
- a_n ... **koeficienty Laurentovy řady**
- Regulární část Laurentovy řady je mocninná řada. Speciálně, obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-z_0)$.
- Hlavní část Laurentovy řady obsahuje záporné mocniny $(z-z_0)$. Speciálně, *není* to mocninná řada.

Konvergence Laurentovy řady

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $M \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ **konverguje na** M (resp. **konverguje absolutně na** M), jestliže v každém bodě množiny M konverguje (resp. konverguje absolutně) současně její hlavní a regulární část. Konverguje-li Laurentova řada na M, potom funkci

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \;\; z \in M,$$

nazýváme **součtem** Laurentovy řady na M. Součet je pro $z \in M$ definován jako
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Otázka

Víme, že mocninné řady konvergují na kruzích. Kde konvergují Laurentovy řady?

Definice

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Množina

$$P(z_0; r; R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

se nazývá **mezikruží** o středu z_0, vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R.

Tvrzení

Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je Laurentova řada. Pak existují jednoznačné $r, R \in [0, +\infty]$ takové, že

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| < R$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$;
2. $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| > r$ a diverguje pro $|z - z_0| < r$.

Je-li $r < R$, pak $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně na $P(z_0; r; R)$ a její součet je holomorfní funkce na tomto mezikruží.

- $P(z_0; r; R)$ z tvrzení … **mezikruží konvergence** Laur. řady

Rozvoj do Laurentovy řady

Věta (Existence rozvoje do Laurentovy řady)

Nechť f je holomorfní funkce na mezikruží $P(z_0; r; R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ taková, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pro } z \in P(z_0; r; R).$$

- Laurentova řada z předchozí věty se nazývá **Laurentův rozvoj** funkce f na $P(z_0; r; R)$.

Příklad

Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ na maximálním prstencovým okolí bodu 1 je

$$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z - 1)^{n-1} \quad \text{na } P(1; 0; 1).$$

- Je-li $R > 0$, pak $P(z_0; 0; R)$ je prstencové okolí bodu z_0, tj. $P(z_0; 0; R) = P(z_0, R)$.

Příklad

1. $\frac{e^z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ na $P(0; 0; \infty)$.
2. $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ na $P(0; 0; 1)$.
3. $\frac{1}{z(1-z)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$ na $P(0; 1; \infty)$.

- 2. příklad je rozvoj funkce do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu.
- 3. příklad je tzv. rozvoj funkce do Laurentovy řady na okolí ∞. Rozvoje na okolí ∞ budeme potřebovat později u (inverzní) Z-transformace.
- 1. příklad je zároveň rozvoj na prstencovém okolí 0 i na okolí ∞.

Izolované singularity

Definice

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **izolovaná singularita** funkce f, jestliže f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 a v bodě z_0 nemá derivaci.

Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
2. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5(1+z^2)^4}$ má izolované singularity v i, $-i$ a 2.
3. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má izolovanou singularitu v 0.
4. Funkce $\ln z$ nemá izolovanou singularitu v 0.

Otázka

Lze nějak klasifikovat „jak špatná“ je izolovaná singularita? Je izolovaná singularita funkce $e^{\frac{1}{z}}$ v 0 „horší“ než ta funkce $\frac{\sin z}{z}$?

Klasifikace izolovaných singularit

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ na $P(z_0)$. Řekneme, že z_0 je:

1. **odstranitelná singularita**, jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;
2. **pól**, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo k se nazývá **řád** (nebo také **násobnost**) pólu;
3. **podstatná singularita**, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel n.

- Pól řádu k se také nazývá k-**násobný pól**.
- Pól řádu 1 se také nazývá **jednoduchý pól**.
- Neformálně:
  - odstranitelná singularity. . . singularita je jen zdánlivá, lze ji odstranit;
  - pól řádu k. . . funkce se blízko z_0 chová jako $\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$;
  - podstatná singularita . . . funkce se blízko z_0 chová velmi divoce, vážné problémy

Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
2. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má v 2 pól řádu 5.
3. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má v 0 podstatnou singularitu.
4. Funkce $f(z) = -\frac{1}{9(z-2)^4} + \sum\limits_{n=-2}^{\infty} 3^n (z-2)^{2n}$, $z \in P(2)$, má v 2 pól řádu 2.

Poučení

Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj funkce na prstencovém okolí izolované singularity, snadno ji můžeme klasifikovat.

Otázka

Co když ale rozvoj nemáme a nechce se nám hledat? Např. pro funkci $\frac{1}{(z-2)^5(1+z^2)^4}$ by se nám hledat rozvoje na prstencových okolích 2, i a $-i$ jistě nechtělo.

Kořeny funkce a jejich násobnosti

Příklad

Mějme funkci $f(z) = (z-1)^2$. Polynom $(z-1)^2$ má v 1 dvojnásobný kořen. Platí $f(1) = f'(1) = 0$, ale $f''(1) \neq 0$.

Obecněji, polynom $P(z) = (z-z_0)^k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, má v z_0 kořen násobnosti k a platí
$P(z_0) = P'(z_0) = \cdots = P^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní a ne všude nulová na $U(z_0)$. Řekneme, že f má v z_0 **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, jestliže $f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Také říkáme, že z_0 je k-**násobný kořen**.

- Z algebry víme, že z_0 je k-násobný kořen polynomu $P(z)$ právě tehdy, když $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, kde $Q(z)$ je polynom takový, že $Q(z_0) \neq 0$.

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní funkce na okolí $U(z_0)$. Pak z_0 je k-násobný kořen právě tehdy, když existuje holomorfní funkce g na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Tvrzení (Násobnost kořene součinu)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f, g jsou holomorfní funkce na okolí $U(z_0)$. Je-li z_0 k-násobný kořen funkce f a l-násobný kořen funkce g, potom z_0 je $(k + l)$-násobný kořen funkce $h(z) = f(z)g(z)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Funkce $f(z) = z^{50}(1 - \cos z)$ má v 0 kořen násobnosti 52.

Póly a odstranitelné singularity

Tvrzení (odstranitelné singularity a póly pomocí násobností kořenů)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$. Jestliže f má v z_0 kořen násobnosti $m \in \mathbb{N}_0$ a g má v z_0 kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$, potom funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě z_0

- odstranitelnou singularitu, jestliže $m \geq n$;
- pól řádu $n - m$, jestliže $m < n$.

Příklad

1. $\frac{1}{(z-2)^5(1+z^2)^4}$ má v 2 pól řádu 5 a v bodech $\pm i$ póly řádu 4.
2. $\frac{(1-\cos z)\sin z}{z^3}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
3. $\frac{\sin z - z}{(1-e^{iz})^3}$ má trojnásobné póly v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. V bodě 0 má odstranitelnou singularitu.

Ilustrace chování funkce v blízkosti izolovaných singularit