Komplexní analýza

Křivkový integrál a Cauchyova věta

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Křivky v komplexní rovině

Definice

Množina $C \subseteq \mathbb{C}$ se nazývá **křivka s parametrizací** $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $a < b$, jestliže

1. $C = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\}$;
2. φ je spojité a $[a,b]$ lze rozdělit na konečně mnoho uzavřených podintervalů, na kterých je φ' spojitá.

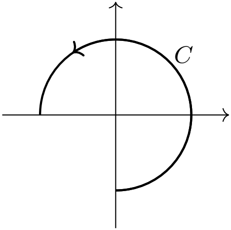
Úmluva

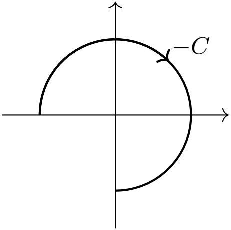
Často budeme říkat pouze křivka, nebudeme-li potřebovat parametrizaci φ zdůraznit.

Terminologie:

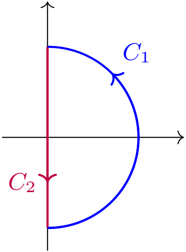
- $\varphi(t)$ ... **parametrizace** křivky C (určuje také **orientaci** křivky C, tj. způsob procházení křivky C)
- $\varphi(a)$ ... **počáteční bod** křivky C
- $\varphi(b)$ ... **koncový bod** křivky C

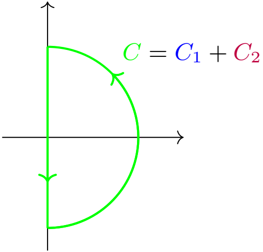
- Máme-li křivku C, pak $-C$ je **opačně orientovaná** křivka ke křivce C.





- Máme-li křivky C_1 a C_2 takové, že koncový bod C_1 splývá s počátečním bodem C_2, pak $C_1 + C_2$ označujeme křivku, která vznikne **spojením křivek** C_1 a C_2.





Křivkový integrál v komplexní rovině

Definice

Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ a nechť f je spojitá komplexní funkce na C. Pak **křivkový integrál** funkce f podél křivky C definujeme předpisem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci. Souhlasné parametrizace křivky dávají stejnou hodnotu integrálu. Neformálně, „souhlasné $=$ stejný směr a stejný počet oběhů“.
- Křivkový integrál je lineární.
- Opačná orientace křivky odpovídá opačnému znaménku integrálu, tj. $\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.
- $\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, kdykoli C_2 je křivka, jejíž počáteční bod je koncovým bodem křivky C_1, a f je navíc spojitá na $C_1 + C_2$.

Příklad

Nechť $n \in \mathbb{Z}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$. Potom

$$\int_C (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Ač to na první pohled nemusí vypadat, tento příklad je důležitý; brzy uvidíme, že úzce souvisí s pojmem rezidua a reziduovou větou.

Jordanovy křivky

Definice

Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

- C je **uzavřená**, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- C je **jednoduchá**, jestliže $\varphi(s) \neq \varphi(t)$ kdykoliv $a < s < t < b$.
- C je **Jordanova křivka**, pokud je uzavřená a jednoduchá.

- Jordanova křivka je (**kladně orientovaná**)/(**záporně orientovaná**), jestliže ji procházíme (proti směru)/(po směru) hodinových ručiček.

Věta (Jordanova věta)

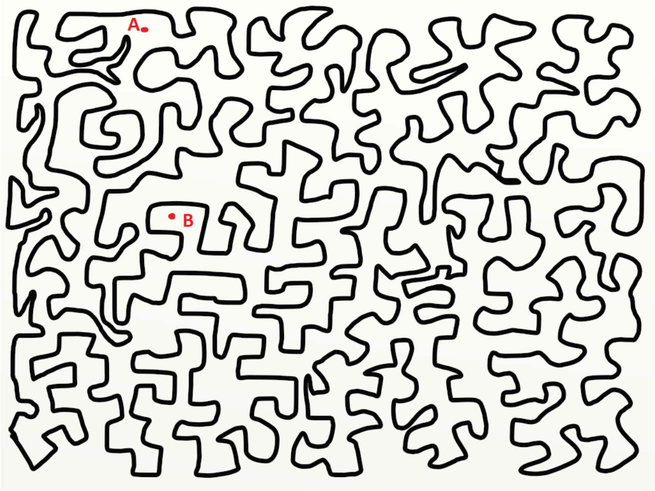
Je-li C Jordanova křivka, pak $\mathbb{C} \setminus C$ je sjednocení omezené oblasti $\operatorname{Int} C$ a neomezené oblasti $\operatorname{Ext} C$, které jsou disjunktní.

Důkaz: ~~Zřejmé, triviální.~~ Důkaz velmi netriviální (vynecháme). ■

- $\operatorname{Int} C$ ... **vnitřek Jordanovy křivky** C.
- $\operatorname{Ext} C$ ... **vnějšek Jordanovy křivky** C.

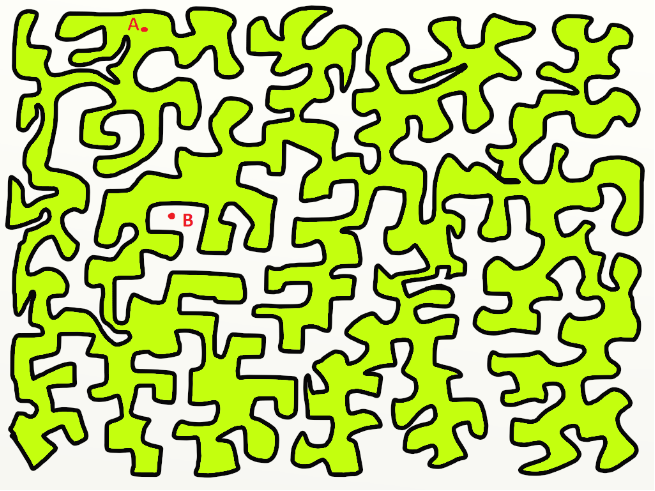
Otázka

Leží body A a B uvnitř, nebo vně?



Otázka

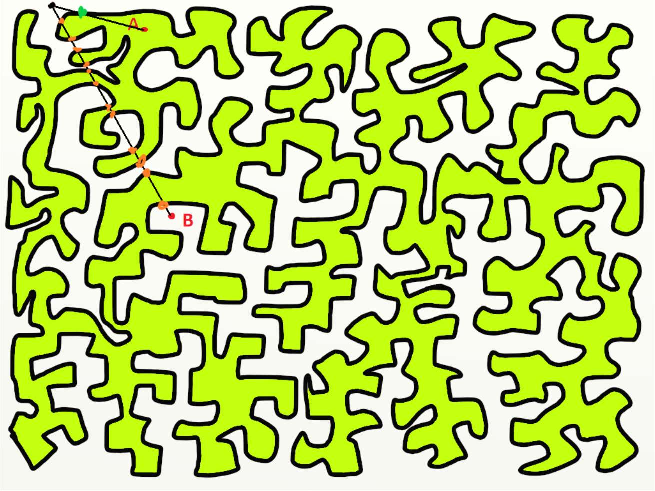
Leží body A a B uvnitř, nebo vně?



- A leží uvnitř, B vně.

Otázka

Leží body A a B uvnitř, nebo vně?



- A leží uvnitř, B vně.

Jednoduše souvislé oblasti

Definice

Řekneme, že oblast $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **jednoduše souvislá**, jestliže pro každou Jordanovu křivku $C \subseteq \Omega$ je $\operatorname{Int} C \subseteq \Omega$.

- Neformálně, jednoduše souvislá oblast je „oblast bez děr“. I jeden odebraný bod je díra!

Příklad

- $\mathbb{C}$ a okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ (tedy otevřené kruhy) jsou jednoduše souvislé oblasti.
- Okolí nekonečna $U(\infty)$, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ a prstencové okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ (tedy otevřené kruhy bez svých středů) jsou oblasti, které nejsou jednoduše souvislé.

Cauchyova věta

Věta (Cauchyova věta)

Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní na Ω, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pro každou uzavřenou křivku C ležící v Ω.

Důkaz: Viz přednáška (pro C kladně orient. kružnici uvnitř Ω). ■

Upozornění

Žádný z předpokladů nelze vynechat.

Nutnost holomorfnosti a jednoduché souvislosti, viz 5. slajd s $n = -1$.

Příklad

Nechť C je kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 1. Pak $\int_C \sin(z^{49}) + e^{\cos z} + \frac{e^{z^2}}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = 0.$