Komplexní analýza

Reziduum a reziduová věta

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

- Mějme funkci $f(z)$, která má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Tedy $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ pro $z \in P(z_0)$.

Otázka

Čemu se rovná $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ pro C kladně orientovanou kružnici se středem v z_0 ležící uvnitř $P(z_0)$?

- Jediná informace, kterou o funkci $f(z)$ máme, je, že má v bodě z_0 izolovanou singularitu. Přesto umíme na otázku uspokojivě odpovědět.
- Platí totiž $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}$.
- Hodnota $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ je tedy zakódována v jednom jediném čísle, a to v koeficientu u $(z-z_0)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ na $P(z_0)$.
- Vše zůstává platné pro libovolnou kladně orientovanou Jordanovu křivku C ležící v $P(z_0)$ takovou, že $z_0 \in \operatorname{Int} C$.

Reziduum

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f(z)$ a uvažme Laurentův rozvoj $f(z)$ na $P(z_0)$, tj. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pro $z \in P(z_0)$. Koeficient a_{-1} se nazývá **reziduum** funkce f v bodě z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Příklad

1. $\operatorname{res}_0 \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{2}$.
2. $\operatorname{res}_1 \left(\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{5}{(z-1)^2} + 8(z-1) \right) = 0$.

Upozornění

Reziduum v izolované singularitě je *vždy* dobře definováno a je to (konečné) číslo. Nemůže se stát, že „neexistuje“ nebo že vyjde ∞.

- Pokud je $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelná singularita funkce f, potom $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$. *Opačná implikace ale neplatí*. Viz 2. příklad výše.

Výpočet rezidua v pólech

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu k funkce f. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Speciálně:
  - je-li z_0 jednoduchý pól, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$;
  - je-li z_0 pól řádu 2, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'$.

Příklad

1. $\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}$.
2. $\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{(z-1)(z+1)^2} = -\frac{1}{4}$.
3. $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^2} = 1$.

Na další slajdu uvidíme, že první reziduum lze určit prakticky okamžitě.

„Dosazovací metoda“

Tvrzení („dosazovací metoda“)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$. Jestliže g má v z_0 *jednonásobný kořen*, potom

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Příklad

$$\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos(z-\pi)}{z(1+e^{iz})} = \frac{i}{\pi}.$$

Upozornění

V „dosazovací metodě“ je *klíčové*, že z_0 je *jednonásobný* kořen jmenovatele. Pro vícenásobné kořeny jmenovatele ji nelze použít.

Chybné použití v případě vícenásobných kořenů typicky vede k chybám, před kterými již bylo varováno na 3. slajdu. . .

Reziduová věta

- Připomeňme si, že již víme, že má-li f izolovanou singularitu v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem v z_0 ležící uvnitř $P(z_0)$, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Věta (Reziduová věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v Ω. Nechť f je holomorfní funkce na $\Omega \setminus S$, kde $S = \{z \in \operatorname{Int} C : z \text{ je izolovaná singularita funkce } f\}$, a S je konečná množina. Potom platí

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{w \in S} \operatorname{res}_w f(z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

Nechť C je kladně orientovaná hranice obdélníka o vrcholech $-i$, $4-i$, $4+i$ a i. Potom

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{3\pi i}{16}.$$

Poučení

Započítávají se pouze rezidua v izolovaných singularitách, které leží uvnitř C.

Poučení

Všimněte si, že reziduová věta vlastně říká, že hodnota křivkového integrálu (samozřejmě za splnění všech předpokladů) *nezávisí* na samotné křivce C. Relevantní je pouze to, jaké izolované singularity leží uvnitř.

Aplikace reziduové věty, integrály přes reálnou osu

- V dalším budeme chápat integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

  tj. ve smyslu tzv. Cauchyovy hlavní hodnoty.
- V tomto smyslu je $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pokud bychom definovali takový integrál jako např.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

  pak by integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ neexistoval.
- Naše pojetí ve smyslu hlavní hodnoty je v jistém smyslu obecnější a pro naše účely užitečnější.

Tvrzení (Integrály s oscilující exponenciálou přes reálnou osu)

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy, $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$, a Q nemá žádný reálný kořen. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Jestliže $\alpha > 0$, pak
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$
kde
$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$
2. Jestliže $\alpha < 0$, pak
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, \mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$
kde
$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z < 0\}.$$
3. Je-li $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$, lze 1 použít pro $\alpha \geq 0$.

Důkaz: Viz přednáška (pro $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$ a $\alpha = 0$). ■

Upozornění

Věnujte pozornost tomu, jak se liší vztah pro výpočet integrálu, v závislosti na znaménku parametru α.

- Při splnění předpokladů dostáváme v případě $\alpha = 0$ vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Příklad

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-1+2i} = \frac{\pi\cos 2}{e} + \frac{\pi \sin 2}{e} i$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi\cos 2}{e}$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi\sin 2}{e}$