Komplexní analýza

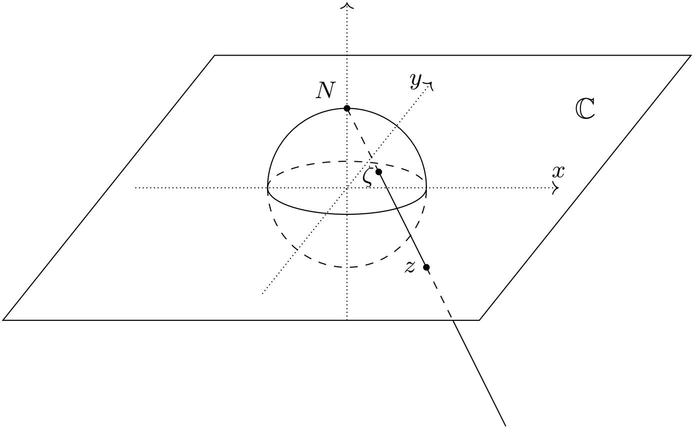
Pár dodělávek ke komplexní proměnné

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Riemannova sféra

Riemannova sféra . . . sféra se středem v počátku a poloměrem 1.



- 0 se zobrazí na jižní pól, body z jednotkové kružnice $|z| = 1$ se zobrazí na rovník.
- Žádné komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ se nezobrazuje na severní pól.
- Severní pól N se identifikuje s ∞.

Rozšířená komplexní rovina

Definice

Množina $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se nazývá **rozšířená komplexní rovina**.

- Definujeme:
  - $z + \infty = \infty + z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
  - $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$;
  - $\frac{z}{\infty} = 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
  - $\frac{z}{0} = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$.
- Nedefinujeme: $\infty + \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Upozornění

V komplexní analýze nemáme $+\infty$ a $-\infty$ jako v reálné analýze!

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Množinu $U(\infty, \varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ nazýváme **okolí ∞** s poloměrem ε.

- $U(\infty, \varepsilon)$ je otevřená množina.

Cauchyho integrální vzorec

Věta (Cauchyho vzorec)

Nechť f je holomorfní funkce na jednoduše souvislé oblasti Ω a $z_0 \in \Omega$. Potom f má v z_0 derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z,$$

kde $C \subseteq \Omega$ je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $z_0 \in \operatorname{Int} C$.

- Speciálně: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} \,\mathrm{d}z$
- Pomocí Cauchyho vzorce se typicky dokazuje existence rozvoje holomorfní funkce do mocninné řady.

Věta (Existence všech derivací)

Jestliže je funkce f holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak má na Ω derivace všech řádů.

Základní věta algebry

Věta (Liouvillova věta)

Nekonstantní celistvá funkce je neomezená.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Goniometrické funkce $\sin$ a $\cos$ jsou v $\mathbb{C}$ neomezené.

Věta (Základní věta algebry)

Každý nekonstantní polynom má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Poučení

Každý nekonstantní polynom lze v komplexním oboru rozložit na součin kořenových činitelů.