Komplexní analýza

Komplexní tvar Fourierovy řady

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Fourierova řady v reálném tvaru, opakování

- Snaha o reprezentaci $T > 0$ periodické funkce $f(t)$ pomocí lineární kombinace harmonických kmitů.
- Konečné lineární kombinace by nám ovšem nestačily.
- Fourierova řada (v reálném tvaru) funkce $f(t)\colon [a, a+T) \to \mathbb{C}$, která je absolutně integrovatelná, je

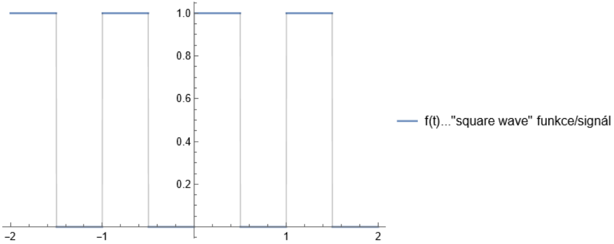
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right),$$

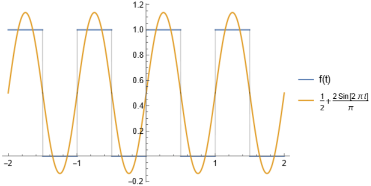
kde

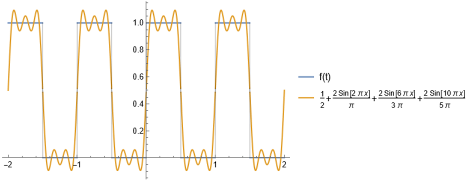
$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \mathrm{d}t$$

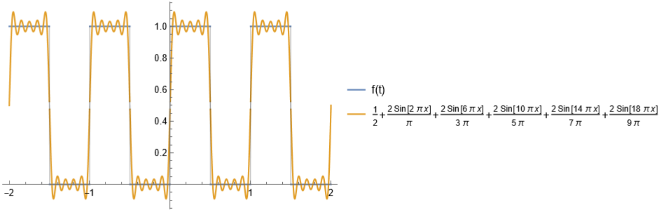
$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \mathrm{d}t.$$

- Toto je tzv. **reálný tvar Fourierovy řady** a čísla a_n, b_n jsou **reálné Fourierovy koeficienty**.









- Funkce $f(t)$ je zde lichá, proto jsou koeficienty u $\cos$ nulové.

- Vzpomeňme si, že

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi int}{T}} + e^{-\frac{2\pi int}{T}}}{2}$$

a

$$\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi int}{T}} - e^{-\frac{2\pi int}{T}}}{2i}.$$

- Za pomoci těchto vztahů se snadno odvodí tzv. komplexní tvar Fourierovy řady, který má mj. tu výhodu, že je úspornější a snáze se s ním pracuje.

- Jest

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{\frac{2\pi int}{T}}+e^{-\frac{2\pi int}{T}}}{2}+b_n\frac{e^{\frac{2\pi int}{T}}-e^{-\frac{2\pi int}{T}}}{2i}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{\frac{2\pi int}{T}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-\frac{2\pi int}{T}}\right).$$

- Dále si všimneme, že

$$\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)e^{-\frac{2\pi int}{T}}\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)e^{\frac{2\pi int}{T}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)e^{-\frac{2\pi i(-n)t}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

- Nakonec

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)e^{-\frac{2\pi i\cdot 0\cdot t}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Komplexní tvar Fourierovy řady

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Nechť $f\colon [a, a+T) \to \mathbb{C}$ je absolutně integrovatelná. Její **komplexní Fourierova řada** (nebo také **komplexní tvar Fourierovy řady**) je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Čísla c_n se nazývají **komplexní Fourierovy koeficienty** funkce f.

- Řadu chápeme ve smyslu limity $\lim_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.

Vztahy mezi reálnými a komplexními koeficienty

- Jest
$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$
a pro $n \in \mathbb{N}$ platí
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$
- Naopak
$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$
- Pokud funkce f nabývá pouze reálných hodnot, potom
$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$
V takovém případě tedy
$$a_n = 2\mathrm{Re}\, c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = -2\mathrm{Im}\, c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Bodová konvergence Fourierovy řady

Věta (Dirichletova věta)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f\colon [a, a+T] \to \mathbb{C}$. Předpokládejme, že f a f' jsou po částech spojité funkce na $[a, a+T]$. Pak Fourierova řada funkce f konverguje k $\frac{1}{2}\left[f(t+) + f(t-)\right]$ v každém bodě $t \in (a, a+T)$.

$f(t+)$ a $f(t-)$ značí jednostranné limity (popořadě) zprava a zleva.

Poučení

Pro „rozumné“ funkce/signály konverguje v bodech spojitosti Fourierova řada k původní funkci. Ve skocích konverguje k aritmetickému průměru.