Křivkový integrál

Zadání

1. Je dána funkce $f(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Vypočtěte $f'(t)$ a $\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Je dána funkce $f(t) = \frac{1}{t-i}$, $t \in \mathbb{R}$. Vypočtěte $f'(t)$ a $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Nalezněte parametrizaci kladně orientované hranice trojúhelníku o vrcholech 0, $1-i$ a 2.

4. Z definice vypočtěte $\int_C 3\mathrm{Im}\, z - 2\mathrm{Re}\, z\,\mathrm{d}z$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1+i$ a koncovým bodem i.

5. Z definice vypočtěte $\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde $2 \in C$ a C je půlkružnice se středem v 0, poloměrem 2, počátečním bodem $-2i$, koncovým bodem $2i$.

6. Z definice vypočtěte $\int_C e^{z-\overline{z}}\,\mathrm{d}z$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1+i\frac{\pi}{2}$ a koncovým bodem 1.

7. Z definice vypočtěte $\int_C \mathrm{Im}\, z\,\mathrm{d}z$, kde C je spojení úseček $[0, 1+i]$ a $[1+i, 2]$.

8. Z definice vypočtěte $\int_C \overline{z}\mathrm{Re}\, z\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z \geq 0, \mathrm{Im}\, z \leq 0, |z| \leq 2\}$.

9. Z definice vypočtěte $\int_C \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v 0 a poloměry 1 a 2.

10. Vypočtěte
$$\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \mathrm{Re}\, z\,\mathrm{d}z$$
kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1| = \frac{1}{2}$.

11. Vypočtěte
$$\int_C ze^z + \frac{3\,|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z$$
kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

12. Vypočtěte
$$\int_C \frac{1}{z^2+4}\,\mathrm{d}z,$$
kde C je kladně orientovaná kružnice se středem $2i$ a poloměrem 1.

13. Vypočtěte
$$\int_C \frac{1}{z} + 2\mathrm{Im}\, z\,\mathrm{d}z,$$
kde C je kladně orientovaná hranice množiny
$$M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z \geq 1, |z-1| \leq 3\}\,.$$

Výsledky

1. $f'(t) = ie^{it}$ a $\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 2i$.
2. $f'(t) = -\frac{t^2+2it-1}{(t^2+1)^2}$ a $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.
3. Například
$$\varphi(t) = \begin{cases} (1-i)t, & t \in [0,1], \\ 1-i+(1+i)(t-1), & t \in (1,2], \\ 2-2(t-2), & t \in (2,3]. \end{cases}$$
4. -2.
5. $4\pi i$.
6. 1.
7. 1.
8. $-\frac{8}{3} + 8i$
9. 0.
10. $\frac{i\pi}{4}$.
11. $4\pi i$.
12. $\frac{\pi}{2}$.
13. -9π

Fourierovy řady

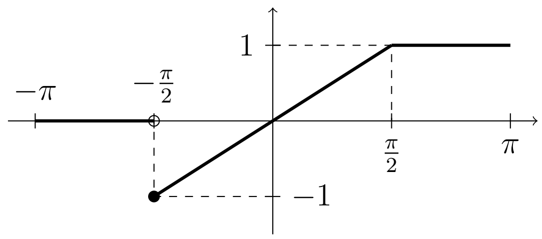
Zadání

1. Je dána funkce
$$f(t) = e^{-t},\ t \in [0,1].$$
   (a) Nalezněte (komplexní) Fourierovu řadu funkce f.
   (b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce f.
   (c) Nalezněte součet Fourierovy řady funkce f na intervalu $[-5,-4]$.

2. Je dána funkce
$$f(t) = te^{it},\ t \in [0,1].$$
   (a) Nalezněte (komplexní) Fourierovu řadu funkce f.
   (b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce f.

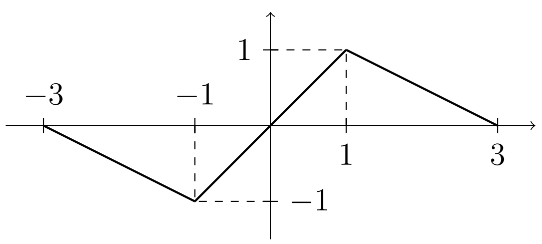
3. Je dána funkce
$$f(t) = \pi - 2\left|t\right|,\ t \in [-\pi,\pi].$$
   (a) Nalezněte (komplexní) Fourierovu řadu funkce f.
   (b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce f.
   (c) Nalezněte součet Fourierovy řady funkce f na intervalu $[6\pi, 8\pi]$.

4. Funkce $f(t)$ je zadaná grafem



   (a) Nalezněte (komplexní) Fourierovu řadu funkce f.
   (b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce f.
   (c) Jaký je součet řad z (a) a (b) na intervalu $[-\pi,\pi]$?
   (d) Jaký je součet řad z (a) a (b) na intervalu $[3\pi, 5\pi]$?

5. Funkce $f(t)$ je zadaná grafem



(a) Nalezněte (komplexní) Fourierovu řadu funkce f.

(b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce f.

(c) Jaký je součet řad z (a) a (b) na intervalu $[3, 9]$?

Výsledky

1. (a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e-1}{e(1+2\pi in)} e^{2\pi int}$.

   (b) $\frac{e-1}{e} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(e-1)}{e(1+4\pi^2n^2)} \cos(2\pi nt) + \frac{4\pi(e-1)n}{e(1+4\pi^2n^2)} \sin(2\pi nt)$.

   (c) $\mathscr{F}_f(t) = e^{-(t+5)}$ pro $t \in (-5,-4)$ a $\mathscr{F}_f(-5) = \mathscr{F}_f(-4) = \frac{e+1}{2e}$.

2. (a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi int}$, kde $c_n = \frac{e^i}{i(1-2\pi n)} + \frac{e^i-1}{(1-2\pi n)^2}$.

   (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nt) + b_n \sin(2\pi nt)$, kde $a_n = \frac{2e^i}{i(1-4\pi^2n^2)} + \frac{2\left(e^i-1\right)\left(1+4\pi^2n^2\right)}{(1-4\pi^2n^2)^2}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $b_n = \frac{4\pi ne^i}{1-4\pi^2n^2} + \frac{8\pi ni\left(e^i-1\right)}{(1-4\pi^2n^2)^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi} e^{int}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4[1-(-1)^n]}{n^2\pi} \sin(nt)$.

   (c) $\mathscr{F}_f(t) = \pi - 2\,|t-6\pi|$ pro $t \in [6\pi, 7\pi]$ a $\mathscr{F}_f(t) = \pi - 2\,|t-8\pi|$ pro $t \in (7\pi, 8\pi]$.

4. (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, kde $c_0 = \frac{\pi}{2}$ a pro $n \neq 0$ je $c_n = \frac{i\left[(-1)^n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}{2\pi n} - \left[\frac{2i}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n}\right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi nt}{2}) + b_n \sin(\frac{\pi nt}{2})$, kde $a_0 = \pi$ a pro $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = -\frac{2}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ a $b_n = -\frac{\left[(-1)^n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}{\pi n} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   (c) $\mathscr{F}_f(t) = 0$ na $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $\mathscr{F}_f(t) = \frac{2}{\pi}t$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathscr{F}_f(t) = 1$ na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\mathscr{F}_f(-\pi) = \mathscr{F}_f(\pi) = \frac{1}{2}$ a $\mathscr{F}_f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

   (d) $\mathscr{F}_f(t) = 0$ na $(3\pi, 3\pi+\frac{\pi}{2})$, $\mathscr{F}_f(t) = \frac{2}{\pi}(t-4\pi)$ na $(3\pi+\frac{\pi}{2}, 4\pi+\frac{\pi}{2}]$, $\mathscr{F}_f(t) = 1$ na $(4\pi+\frac{\pi}{2}, 5\pi)$, $\mathscr{F}_f(3\pi) = \mathscr{F}_f(5\pi) = \frac{1}{2}$ a $\mathscr{F}_f(3\pi + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

5. (a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{9[(1-i\sqrt{3})^n - (1+i\sqrt{3})^n]}{2^{n+2}\pi^2n^2} e^{in\frac{\pi}{3}t}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9i[(1-i\sqrt{3})^n - (1+i\sqrt{3})^n]}{2^{n+1}\pi^2n^2} \sin(n\frac{\pi}{3}t)$.

   (c) $\mathscr{F}_f(t) = f(t-6)$ na $[3, 9]$.