Úvod

Zadání

1. Nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla z, jestliže

   (a) $z = \frac{(1-2i)^2}{1+i}$;

   (b) $z = (1+i)^2 + \frac{1+i^{11}}{1+i}$;

   (c) $z = \frac{2+3i}{1+2i} - \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$.

2. Dokažte, že pro všechna $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

3. Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla z, jestliže

   (a) $z = 3 + 4i$;

   (b) $z = -2 + i$;

   (c) $z = -1 + 3i^{43}$;

   (d) $z = \frac{i^{31}}{2-i}$.

4. Určete velikost, v jakém leží kvadrantu a hlavní hodnotu argumentu čísla z, je-li

   (a) $z = 5\big(\cos(-\frac{399}{200}\pi) + i\sin(-\frac{399}{200}\pi)\big)$;

   (b) $z = (-3-3i)e^{\frac{\pi}{3}i}$;

   (c) $z = (5-5i)^{11}$.

5. Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla

   $$z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{\sqrt{3}i - 1}$$

   a s jeho pomocí nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla z^{12}.

6. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, aby

   $$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^n = -1.$$

7. Ať $z = x + iy \neq 0$. Ukažte, že

   $$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{je-li } x > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } y < 0; \\ \pi, & \text{je-li } y = 0 \text{ a } x < 0. \end{cases}$$

8. Ať $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Ukažte, že

   $$\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

9. Ať z, w jsou dvě nenulová komplexní čísla, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Ukažte, že $z = w$ právě tehdy, když $|z| = |w|$ a existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $\varphi = \psi + 2k\pi$.

10. Popište geometricky množinu všech $z \in \mathbb{C}$ splňujících

    (a) $|z + 1| = 2$;

    (b) $|z - 1| < 1$ a $|z| = |z - 2|$;

    (c) $|z|^2 > z + \overline{z}$;

    (d) $\operatorname{Re} z = |z - 2|$.

11. V oboru komplexních čísel řešte rovnici

    (a) $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$;

    (b) $z^3 = 1$;

    (c) $z^4 = 81i$;

    (d) $z^5 + 1 + i = 0$;

    (e) $z^n = \overline{z}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Výsledky

1. (a) $\operatorname{Re} z = -\frac{7}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$;
   (b) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$;
   (c) $\operatorname{Re} z = \frac{13}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$.

3. (a) $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde (např.) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;
   (b) $z = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde (např.) $\varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$
   (c) $z = \sqrt{10}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde (např.) $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} 3$
   (d) $z = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde (např.) $\varphi = -\operatorname{arctg} 2$.

4. (a) $|z| = 5$, 1. kvadrant, $\arg z = \frac{1}{200}\pi$
   (b) $|z| = \sqrt{10}$, 4. kvadrant, $\arg z = -\frac{5}{12}\pi$
   (c) $|z| = \left(\sqrt{50}\right)^{11}$, 3. kvadrant, $\arg z = -\frac{3}{4}\pi$

5. $z = \sqrt{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{Re} z^{12} = 2^6$ a $\operatorname{Im} z^{12} = 0$.

6. $n = 6(2k+1)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

10. (a) Kružnice o středu -1 a poloměru 2.
    (b) Úsečka bez krajních bodů $1 + i$ a $1 - i$.
    (c) Množina bodů ležících vně kružnice o středu 1 a poloměru 1.
    (d) Parabola o rovnici $4(x-1) = y^2$.

11. (a) $z_n = 2(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{3} + n\pi$ a $n = 0, 1$;
    (b) $z_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$, kde $n = 0, 1, 2$;
    (c) $z_n = 3(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ a $n = 0, 1, 2, 3$;
    (d) $z_n = \sqrt[10]{2}(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{5}$ a $n = 0, 1, 2, 3, 4$;
    (e) Pro $n = 1$ je řešení libovolné $z \in \mathbb{R}$; pro $n > 1$ je řešení $z = 0$ a také $z_m = \cos\varphi_m + i\sin\varphi_m$, kde $\varphi_m = \frac{2m\pi}{n+1}$, $m = 0, 1, ..., n$.