Komplexní funkce komplexní proměnné

Zadání

1. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce
$$f(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$$
a rozhodněte, zda
$$i \in M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, f(z) \geq 0, \mathrm{Im}\, f(z) = 0\}\,.$$

2. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce
$$f(z) = |z| + \frac{z - i}{z + 1}$$
a rozhodněte, zda
$$2i \in M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, f(z) \geq 1, \mathrm{Im}\, f(z) < 0\}\,.$$

3. Určete reálnou a imaginární část funkce $f(z)$, kde
   (a) $f(z) = \frac{\mathrm{Im}\,(z^2)}{i\bar{z}}$;
   (b) $f(z) = |z + i|^2 + \frac{(\mathrm{Im}\,z)^2}{1 + i\bar{z}}$

4. Rozhodněte, zda exisuje limita $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}\,z}{z}$. Pokud ano, spočtěte ji.

5. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad z \in \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| \geq 1\}\,.$$
Nalezněte reálnou a imaginární část této funkce a interpretujte f geometricky. Dále nalezněte obraz přímky $\mathrm{Im}\,z = 2$.

6. Ukažte, že funkce $f(z) = \arg z$ není v bodě -1 spojitá.

7. Nalezněte všechny body, ve kterých je funkce $f(z)$ diferencovatelná, a v těchto bodech vypočtěte $f'(z)$, jestliže
   (a) $f(z) = x^2 + iy^2$;
   (b) $f(z) = \mathrm{Re}\,(z^2) - i\mathrm{Im}\,(z^2)$.

8. Nalezněte hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby
$$f(z) = \frac{3}{2}x^2 - i\alpha xy + \beta y^2$$
byla celistvá funkce.

9. Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce

$$f(z) = x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5\beta y + \beta x)$$

diferencovatelná v bodě $1+3i$. Pro tyto hodnoty parametrů určete $f'(2+4i)$.

10. Je dána funkce

$$f(z) = x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β tak, aby $f(z)$ byla

(a) diferencovatelná na přímce o rovnici $\operatorname{Im} z = 0$;

(b) celistvá.

11. Nalezněte všechny celistvé funkce f tak, aby jejich reálná část byla

$$u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2.$$

12. Nalezněte celistvou funkci f tak, aby její reálná část byla

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy \text{ a } f(0) = 2i.$$

13. Rozhodněte, zda je reálná část funkce

$$f(z) = \left(\operatorname{Im}(z^2)\right)^3 + i\bar{z},\ z \in \mathbb{C},$$

harmonická funkce.

14. Je dána funkce

$$u(x,y) = \sinh x \sin y.$$

(a) Ukažte, že u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.

(b) Nalezněte funkci $v(x,y)$ tak, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá a $f(i\pi) = -i$.

15. Je dána funkce

$$u(x,y) = \alpha x^4 + 6x^2y^2 - \beta y^4 - 3y.$$

(a) Nalezněte hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby u byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

(b) Nalezněte všechny funkce $v(x,y)$ tak, aby $u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá.

16. Nechť $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$u(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(a) Ověřte, že u je harmonická na Ω.

(b) Nalezněte holomorfní funkci $f(z)$ na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ takovou, že $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ a $f(1) = 0$.

17. Je dána funkce
$$u(x,y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x,$$
kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

    (a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby $u(x,y)$ byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

    (b) Pro všechny kladné hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x,y)$ tak, aby $u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá.

18. Je dána funkce
$$u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy.$$

    (a) Nalezněte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce
$$f(z) = u(x,y) + i\left[(1+x)\sin y + \alpha e^y \ln(1+x) + \beta y^2\right]$$
byla diferencovatelná na množině $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

    (b) Nalezněte všechny funkce $v(x,y)$ tak, aby $g(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá.

19. Je dána funkce
$$u(x,y) = x^n - y^n + e^{\alpha y}\sin(4x) - 2y.$$

    (a) Nalezněte všechny hodnoty parametrů $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $u(x,y)$ byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

    (b) Pro největší hodnoty parametrů n a α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x,y)$ tak, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá.

20. Ať $f(z) = u(x) + iv(y)$ je celistvá. Ukažte, že pak je $f(z)$ polynom stupně nejvýše jedna.

Výsledky

1. $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, $v(x,y) = \frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$ a $i \in M$.

2. $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-y}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$ a $2i \notin M$.

3. (a) $u(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$
   (b) $u(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + \frac{y^2(1+y)}{(1+y)^2+x^2}$, $v(x,y) = -\frac{xy^2}{(1+y)^2+x^2}$

4. Neexistuje.

5. Re $f = \frac{x}{x^2+y^2}$, Im $f = \frac{y}{x^2+y^2}$. Bod z se zobrazí na bod $w = \frac{z}{|z|^2}$. Obraz přímky je kružnice (bez bodu 0) o poloměru $\frac{1}{4}$ a středu $\frac{i}{4}$.

7. (a) $f(z)$ je diferencovatelná v bodech $z = x+ix$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $f'(x+ix) = 2x$;
   (b) $f(z)$ je diferencovatelná v 0 a $f'(0) = 0$.

8. $\alpha = -3$, $\beta = -\frac{3}{2}$.

9. $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $f'(2+4i) = 5 + 13i$

10. (a) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 3$.
    (b) $\alpha = \beta = 3$.

11. $f(z) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(2y - 3x^2y + y^3 + K) = 2z - z^3 + iK$, kde $K \in \mathbb{R}$.

12. $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy + i(4x^3y - 4xy^3 + y^2 - x^2 + 2) = z^4 - iz^2 + 2i$.

13. Není.

14. (b) $v(x,y) = -\cosh x \cos y - 2$.

15. (a) $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
    (b) $v(x,y) = -4x^3y + 4xy^3 + 3x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

16. (b) $f(z) = \frac{i}{z} - i$.

17. (a) $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.
    (b) Pro $\alpha = 1$ je $v(x,y) = e^y \cos x + \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{3}{2}x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

18. (a) $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$.
    (b) $v(x,y) = e^x \sin y - e^y \sin x + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

19. (a) $n = 0, 1, 2$ a $\alpha = \pm 4$.
    (b) $v(x,y) = 2xy + e^{4y}\cos(4x) + 2x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.