Mocninné řady

Zadání

1. Vypočtěte
   (a) $\lim_{n\to\infty} i^n n$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3ni}{1+in}$.
2. Nalezněte střed z_0 mocninné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+1)^{5n+1}}{n!}.$$
3. Určete koeficienty u $(z-i)^0$, $(z-i)^1$, $(z-i)^3$ a $(z-i)^4$ v mocninné řadě
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}(z-i)^{2n-3}.$$
4. Pomocí podílového nebo odmocninového kritéria rozhodněte, zda uvedené číselné řady konvergují absolutně nebo divergují:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$;
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (3-4i)^n$.
5. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$
6. Nalezněte poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}(z-i)^{2n}$.
7. Určete poloměr konvergence a v kruhu konvergence součet mocninné řady
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n+1}$;
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n}$;
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(z-2i)^n$;
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$;
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n$;
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)}$.
8. Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady v okolí bodu z_0 a nalezněte kruh konvergence této řady, jestliže
   (a) $f(z) = \sin z$ a $z_0 = 0$;
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$ a $z_0 = 1+i$;
   (c) $f(z) = \frac{1}{3z-2}$ a $z_0 = 1$;
   (d) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a $z_0 = i$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ a $z_0 = 0$;

(f) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ a $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = z^2$ a $z_0 = 1$;

(h) $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$ a $z_0 = 1$;

(i) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ a $z_0 = 0$.

(j) $f(z) = \frac{2-3z}{z^3-2z^2}$ a $z_0 = 1$;

(k) $f(z) = \cos^2 z$ a $z_0 = 0$;

9. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{3z+5}{z^2(z+1)}.$$

   (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady se středem v bodě -2 a určete poloměr konvergence této řady.

   (b) Nalezněte rozvoj funkce
   $$g(z) = f'(z) + 2 + z + z^2$$
   do mocninné řady se středem v bodě -2 a určete její poloměr konvergence.

10. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice
$$(z-1)f'(z) + f(z) = 0$$
splňující počáteční podmínku $f(0) = 1$.

11. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice
$$(z^2+1)f''(z) - 4zf'(z) + 6f(z) = 0$$
splňující počáteční podmínky $f(0) = 1$ a $f'(0) = -1$.

Výsledky

1. (a) ∞.
   (b) $-3-2i$.

2. $z_0 = -\frac{1}{2}$.

3. Ať a_n je koeficient u $(z-i)^n$. Pak $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ a $a_4 = 0$.

4. (a) konverguje absolutně.
   (b) diverguje.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. $R = \sqrt{3}$.

7. (a) $R = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n = ze^{-z}$;
   (b) $R = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n} = (1+2z^2)e^{z^2}$;
   (c) $R = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(z-2i)^n = -\ln(3+2i-z) + \ln 3$;
   (d) $R = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$;
   (e) $R = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n = \ln(2+z) - \ln 2$;
   (f) $R = 4$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^n(n+3)} = -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4-z) + 16\ln 4$.

8. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ pro $z \in \mathbb{C}$;
   (b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-1-i)^n$ pro $|z-1-i| < \sqrt{2}$;
   (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n (z-1)^n$ pro $|z-1| < \frac{1}{3}$;
   (d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[i^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\right](z-i)^n$ pro $|z-i| < 1$;
   (e) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ pro $|z| < 1$;
   (f) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}$ pro $|z| < 1$;
   (g) $f(z) = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2$ pro $z \in \mathbb{C}$;
   (h) $f(z) = (z-1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$ pro $|z-1| < 3$;
   (i) $f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$ pro $|z| < 1$;
   (j) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [1-(-1)^n n](z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$;
   (k) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} z^{2n}$ pro $z \in \mathbb{C}$.

9. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5n+9}{2^{n+2}} - 2\right](z+2)^n$ pro $|z+2| < 1$ (poloměr konvergence je tedy $R = 1$);
   (b) $g(z) = (z+2)^2 - 3(z+2) + 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5n+14}{2^{n+3}} - 2\right](n+1)(z+2)^n$ pro $|z+2| < 1$ (poloměr konvergence je tedy $R = 1$).

10. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$.

11. $f(z) = 1 - z - 3z^2 + \frac{1}{3}z^3$ pro $z \in \mathbb{C}$.