Laurentovy řady, izolované singularity a rezidua

Zadání

1. Určete koeficienty u mocnin $(z-i)^{-10}$, $(z-i)^{-1}$, $(z-i)^1$ a $(z-i)^2$ v Laurentově řadě
$$\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} (z-i)^{3n+8}.$$

2. (a) Laurentova řada
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+4)^n$$
má vnitřní poloměr konvergence $r = 3$ a vnější $R = 9$. Konverguje v bodě $z = -6$?

   (b) Laurentova řada
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-i)^n$$
má vnitřní poloměr konvergence $r = 1$ a vnější $R = 4$. Konverguje v bodě $z = 2$?

3. Nalezněte rozvoj funkce
$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$
do Laurentovy řady na co největším prstencovém okolí bodu 1 a toto okolí určete.

4. Rozviňte funkci
$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-3)^4(z^2+2z-15)^2}$$
do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 3$ a určete jeho parametry.

5. Nalezněte rozvoj funkce
$$f(z) = \frac{e^{3z-1}}{z^2}$$
do Laurentovy řady na co největším okolí nekonečna a toto okolí určete.

6. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2}$ do Laurentovy řady

   (a) na prstencovém okolí bodu $z_0 = 1$;

   (b) na okolí bodu $z_0 = \infty$.

7. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ do Laurentovy řady na mezikruží daném nerovnostmi $1 < |z| < 3$.

8. Určete typ izolované singularity funkce $f(z)$ v bodě z_0, jestliže

   (a) $f(z) = \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{n^2+5n}{2^n}(z-3i)^{2n}$ na $P(3i)$ a $z_0 = 3i$;

   (b) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{3} \frac{(-1)^n}{|n|!} z^{n+1}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$;

   (c) $f(z) = -\frac{9}{(z+2)^5} + \frac{8}{(z+2)^3} - \frac{3}{(z+2)^2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2(z+2)^{3n+4}$ na $P(-2)$ a $z_0 = -2$;

   (d) $f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty}(n+3)(z-i)^{2n+7}$ na $P(i)$ a $z_0 = i$.

9. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{7}{3(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}, \ z \in P(1),$$

   měla v bodě 1 jednoduchý pól.

10. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$, jestliže

   (a) $f(z) = \frac{z+i}{(z^2+1)^2}$

   (b) $f(z) = \frac{z+i}{z^4+2z^2+1}$;

   (c) $f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{z^2(z-\pi)^4}$

   (d) $f(z) = \frac{(e^z-1)(1-\cos z)^4}{z^{11}}$

   (e) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5(1-e^{iz})}$

   (f) $f(z) = \frac{e^{iz}-i-\cos z}{(1-\sin z)^2(z-\frac{\pi}{2})}$

   (g) $f(z) = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{z}}$;

   (h) $f(z) = \frac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$.

11. Určete reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0, jestliže

   (a) $f(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{n-2}} (z+1)^{n-7}$ na $P(-1)$ a $z_0 = -1$;

   (b) $f(z) = \sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{(-6)^n}{n!} (z-i)^{2n-4}$ na $P(i)$ a $z_0 = i$;

   (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n^2-10}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$;

   (d) $f(z) = \sum_{n=-10}^{+\infty} \frac{n+2}{2^n} z^{n^2-n-3}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$;

   (e) $f(z) = \frac{3}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2(z+2)^{3n+5}$ na $P(-2)$ a $z_0 = -2$;

   (f) $f(z) = \frac{2}{z^3} + \sum_{n=-3}^{\infty}(n+1)z^{2n+4}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$.

12. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_1 \left(\frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{2}{3(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n} \right) = \frac{4}{9}.$$

13. Spočtěte reziduum.

   (a) $\operatorname{res}_\pi \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(b) $\operatorname{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$

(d) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{e^z-1-z}$

(e) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{1-\cos z}$

14. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$ a spočtěte v nich reziduum, jestliže

(a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$;

(b) $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$;

(c) $f(z) = \frac{z+1}{1-e^{2\pi i z}}$;

(d) $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$;

(e) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z(2\pi-z)^3}$;

(f) $f(z) = \frac{1}{\sin z+\cos z}$.

15. Nalezněte hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^5}$ na prstencovém okolí bodu 0 a určete $\operatorname{res}_0 f(z)$.

16. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{z^8 - 4z^6}.$$

(a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.

(b) Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$.

(c) Vypočtěte rezidua ve všech izolovaných singularitách.

17. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z+1}{z(1-z)^2}.$$

(a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.

(b) Klasifikujte všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkcí

$$g(z) = \frac{1}{z^{20}} f(z) \qquad \text{a} \qquad h(z) = \frac{1}{z^{20}} + f(z).$$

Dále nalezněte reziduum funkcí $g(z)$ a $h(z)$ v bodě $z_0 = 0$.

Výsledky

1. Ať a_n je koeficient u $(z-i)^n$. Pak $a_{-10}=0$, $a_{-1}=-8$, $a_1=0$ a $a_2=0$.

2. (a) Ne.
   (b) Ano.

3. $\sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{2^{n+3}e^2}{(n+3)!}(z-1)^n$ pro $0<|z-1|$.

4. $f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^{n+1}}n(n-1)(z-3)^{n-6}$ pro $0<|z-3|<8$ (tj. $r=0$ a $R=8$)

5. $\sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{3^{n+2}e^{-1}}{(n+2)!}z^n$ pro $0<|z|$.

6. (a) $f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n$ pro $0<|z-1|<1$.
   (b) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-3}$ pro $|z|>1$.

7. $f(z)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{z^{n+1}}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ pro $1<|z|<3$.

8. (a) Pól řádu -8.
   (b) Podstatná singularita.
   (c) Pól řádu 3.
   (d) Odstranitelná singularita.

9. $k=2$, $a=-\frac{8}{3}$

10. (a) Bod i je pól řádu 2. Bod $-i$ je pól řádu 1.
    (b) $-i$ je jednoduchý pól, i je dvojnásobný pól.
    (c) Bod 0 je pól řádu 2. Bod π je pól řádu 1.
    (d) Bod 0 je pól řádu 2.
    (e) Body $2k\pi$ pro $k\neq 0$ jsou odstranitelné singularity. Bod 0 je pól řádu 4.
    (f) Body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pro $k\neq\mathbb{Z}$ jsou póly řádu 2. Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu 3.
    (g) $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, jsou póly řádu 2 (bod $z=0$ není *izolovaná* singularita funkce $f(z)$).
    (h) 0 pětinásobný pól, 3 jednoduchý pól a $2k\pi\pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, kde $k\in\mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly.

11. (a) $\operatorname{res}_{-1} f(z)=\frac{4}{9}$
    (b) $\operatorname{res}_{i} f(z)=0$
    (c) $\operatorname{res}_{0} f(z)=-\frac{1}{4}$
    (d) $\operatorname{res}_{0} f(z)=3$
    (e) $\operatorname{res}_{-2} f(z)=6$
    (f) $\operatorname{res}_{0} f(z)=0$

12. $k=1$ a $\alpha=\frac{1}{3}$

13. (a) $\frac{1}{\pi^2}$
    (b) $\frac{1}{\pi^2}$
    (c) $-\frac{i}{2}$
    (d) 2
    (e) 0

14. (a) 0 je pól řadu 2, π je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = \operatorname{res}_\pi f(z) = -\frac{1}{\pi^2}$;
    (b) 0 je pól řadu 2, -2 a 1 jsou póly řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{res}_{-2} f(z) = \frac{1}{12}$ a $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{2}{3}$;
    (c) $z = -1$ je odstranitelná singularita, $z = k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je pól řádu 1, $\operatorname{res}_{-1} f(z) = 0$ a $\operatorname{res}_k f(z) = \frac{k+1}{-2\pi i}$;
    (d) $z = 0$ je pól řádu 2, $z = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$ a $\operatorname{res}_{k\pi} f(z) = \frac{(-1)^k}{k\pi}$;
    (e) 0 je odstranitelná singularita, 2π je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$ a $\operatorname{res}_{2\pi} f(z) = \frac{1}{2\pi}$;
    (f) $z_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly, $\operatorname{res}_{z_k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$.

15. Hlavní část je $\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}$; $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$.

16. (a) $f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} -\frac{z^{2n}}{4^{n+4}}$ pro $0 < |z| < 2$.
    (b) 0 je pól řádu 6 a ± 2 jsou póly řádu 1.
    (c) $\operatorname{res}_{-2} f(z) = -\frac{1}{2^8}$, $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$, $\operatorname{res}_2 f(z) = \frac{1}{2^8}$.

17. (a) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)z^n$ pro $0 < |z| < 1$.
    (b) Funkce g má v 0 pól řádu 21 a v 1 pól řádu 2, funkce h má v 0 pól řádu 20 a v 1 pól řádu 2, $\operatorname{res}_0 g(z) = 41$ a $\operatorname{res}_0 h(z) = 1$.