

Fourierova transformace

Zadání

1. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce

(a) $f(t) = e^{-|t|}$;

(b) $f(t) = te^{-(t+5)^2}$;

(c) $f(t) = \frac{1}{(1-it)^2}$.

2. Je dána funkce $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

(a) Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ a nakreslete graf její imaginární části.

(b) Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(t) \sin(2t)$.

(c) Vypočtěte inverzní Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

3. Je dána funkce

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 5}.$$

(a) Nalezněte $\hat{f}(\omega)$.

(b) Nalezněte inverzní Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

(c) Nalezněte $\hat{g}(\omega)$, kde $g(t) = f'(t) \sin t + f(-4t + 3)$.

4. Je dána funkce $f(t) = t(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1))$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Stanovte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

(b) Stanovte inverzní Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(2t+1)$.

(c) Pomocí bodu (a) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce $h(t)$, která je zúžením funkce $f(t)$ na interval $[0, 1]$.

5. Jsou dány funkce $f(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t-1)$ a $g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$.

(a) Vypočtěte $h(t) = (f * g)(t)$.

(b) Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f * g)(t)$.

(c) Pomocí bodu (b) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce, která je zúžením funkce $h(t) = (f * g)(t)$ na interval $[-1, 2]$.

6. Je dána funkce $f(t) = e^{-at}\mathbf{1}(t)$, kde $a > 0$.

(a) Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t)$.

(b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f_1 * f_2)(t)$, kde $f_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$ a $f_2(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$.

(c) Nalezněte funkci $h(t)$.

7. Je dána funkce

$$f(t) = e^{-t^2} * [\mathbf{1}(t+2) - \mathbf{1}(t-2)].$$

(a) Vypočtete $\hat{f}(\omega)$.

(b) Nalezněte spojitou funkci $g \in L^1(\mathbb{R})$ tak, aby $\hat{g}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$.

8. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

9. Pomocí Fourierovy transformace řešte (integrální) rovnici

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau = e^{-t^2}.$$

10. Fourierova transformace spojitě funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ je

$$\hat{h}(\omega) = \frac{4}{(\omega + 3i)(\omega - i)}.$$

Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = h(t).$$

Výsledky

1. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$;
 (b) $\hat{f}(\omega) = i\sqrt{\pi}(5i - \frac{\omega}{2})e^{5i\omega}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$;
 (c) $\hat{f}(\omega) = 2\pi\omega e^{-\omega}\mathbf{1}(\omega)$.
2. (a) $\hat{f}(\omega) = -i\pi\text{sgn}(\omega)e^{-a|\omega|}$.
 (b) $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2i}(\hat{f}(\omega - 2) - \hat{f}(\omega + 2))$.
 (c) $\check{f}(\omega) = \frac{i}{2}\text{sgn}(\omega)e^{-a|\omega|}$.
3. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}e^{-i\omega}$.
 (b) $\check{f}(\omega) = \frac{1}{4}e^{-2|\omega|}e^{i\omega}$.
 (c) $\hat{g}(\omega) = \frac{\omega-1}{2}\hat{f}(\omega - 1) - \frac{\omega+1}{2}\hat{f}(\omega + 1) + \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\omega}{4}}\hat{f}(-\frac{\omega}{4})$.
4. (a) $\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega}(\frac{i}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}) - \frac{1}{\omega^2}$ pro $\omega \neq 0$; $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$.
 (b) $\check{g}(\omega) = -\frac{i}{2\pi\omega} + \frac{1}{\pi\omega^2} - \frac{1}{\pi\omega^2}e^{-i\frac{\omega}{2}}$ pro $\omega \neq 0$; $\check{g}(0) = \frac{1}{8\pi}$.
 (c) $c_0 = \frac{1}{2}$ a $c_n = \frac{i}{2\pi n}$ pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
5. (a) $h(t) = 0$ pro $t \in (-\infty, -1) \cup [2, \infty)$, $h(t) = t + 1$ pro $t \in [-1, 0)$, $h(t) = 1$ pro $t \in [0, 1)$ a $h(t) = 2 - t$ pro $t \in [1, 2)$.
 (b) $\hat{h}(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}$ pro $\omega \neq 0$ a $\hat{h}(0) = 2$ pro $\omega = 0$.
 (c) $c_n = \frac{1}{3}\hat{h}(\frac{2\pi n}{3})$.
6. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.
 (b) $\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{(\omega-i)(\omega-2i)}$.
 (c) $h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{1}(t)$.
7. (a) $\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(2\omega)}{\omega}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{i\omega} [e^{-\frac{\omega^2}{4}+2i\omega} - e^{-\frac{\omega^2}{4}-2i\omega}]$.
 (b) $g(t) = e^{-(t+2)^2} - e^{-(t-2)^2}$.
8. $y(t) = -\frac{t}{2}e^{-t}\mathbf{1}(t) - \frac{1}{4}e^{-|t|}$.
9. $\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2t^2}$.
10. $y(t) = \begin{cases} (\frac{t}{2} - \frac{3}{8})e^{3t} + \frac{1}{2}e^t, & t < 0; \\ \frac{1}{8}e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$