Z-transformace

Zadání

1. Je dána posloupnost
$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots).$$
   (a) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
   (b) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(2^n a_n - n a_n)_{n=0}^{\infty}$.
   (c) Nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_0 = 1$ a $b_n = 0$ pro $n \geq 1$.
   (d) Nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_1 = 1$ a $b_n = 0$ pro $n \neq 1$.
   (e) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$ z předchozího bodu.

2. Nalezněte inverzní Z-transformaci funkce
   (a) $F(z) = \frac{e^{\frac{5}{z}} - 1}{z^3}$;
   (b) $F(z) = \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)$;
   (c) $F(z) = \frac{1}{z^{100}+1}$;
   (d) $F(z) = \frac{z}{z^2-6z+8}$.

3. Je dána funkce
$$F(z) = \ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z-2}.$$
   (a) Nalezněte rozvoj $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí nekonečna.
   (b) Určete členy a_0, a_1, a_2 posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, která je inverzní Z-transformací funkce $F(z)$.
   (c) Určete členy c_0, c_1, c_2 posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty}$, kde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost z bodu (b).

4. Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice
$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = (-2)^n,$$
s počátečními podmínkami $y_0 = 0$, $y_1 = 0$.

5. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $a_0 = 1$ a $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 1$. Nalezněte řešení diferenční rovnice
$$y_{n+3} + y_n = a_n$$
vyhovující počátečním podmínkám $y_0 = y_1 = 0$ a $y_2 = -1$.

6. Pomocí Z-transformace řešte diferenční rovnici
$$y_{n+1} + 4y_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$$
s počáteční podmínkou $y_0 = 4$.

7. Pomocí Z-transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k} = n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = 0$.

Výsledky

1. (a) $\frac{z^2}{z^2-1}$.

   (b) $\frac{z^2}{z^2-4} - \frac{2z^2}{(z^2-1)^2}$.

   (c) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (d) $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $c_0 = 0$ a $c_n = a_{n-1}$ pro $n \geq 1$.

   (e) $\frac{z}{z^2-1}$.

2. (a) $a_0 = \cdots = a_4 = 0$ a $a_n = \frac{5^{n-3}}{(n-3)!}$ pro $n \geq 4$;

   (b) $a_0 = 0$ a $a_n = -\frac{1}{n}$ pro $n \geq 1$;

   (c) $a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{100}-1}, & \text{jestliže } n = 100(k+1) \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$

   (d) $a_n = \frac{1}{2}\left(4^n - 2^n\right)$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

3. (a) $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}4^n}{nz^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}z^{n+1}}$.

   (b) $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{34}{9}$.

   (c) $c_0 = 0$, $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{31}{9}$.

4. $y_n = (-1)^n - \left(1 - \frac{n}{2}\right)(-2)^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

5. $y_n = \frac{2}{3}(-1)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

6. $y_n = -\frac{2^n}{3} + \frac{3^{n+1}}{7} - 2\frac{(-4)^n}{21} + 4(-4)^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

7. $y_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(6-n)$ pro $n \geq 1$.