Vzorový zkouškový test.

Příklad č.1. Zde bude otázka na aplikaci derivace. Může to být v podobě užití tečné roviny ke grafu nebo vyšetření extrému funkce více proměnných. Ukázky obou typů jsou následující:

(a) Nalezněte bod na elispoidu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, ve kterém je tečná rovina k elipsoidu rovnoběžná s rovinou $3x - y + 3z - 1 = 0$.

Řešení: Body jsou dva, $A_1 = \sqrt{2}(\frac{3}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$ a $A_2 = -A_1$.

(b) Plechovka ve tvaru válce má mít objem $54\pi\, cm^3$. Dno a víko jsou z materiálu, jehož cena je 0.25 Kč$/cm^2$, a cena pláště je 0.5 Kč$/cm^2$. Nalezněte rozměry plechovky tak, aby cena byla minimální.

Řešení: Poloměr dna r a výška plechovky h jsou $r = h = 3\sqrt[3]{2}\, cm$.

Příklad č.2. Prohození pořadí integrace, např.

Přepište následující integrál

$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{5-x^2}} f\, dy\, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\, d\varphi$.

Řešení: $\displaystyle\int_1^2 \int_1^{\sqrt{5-y^2}} f\, dx\, dy, \quad \int_{\operatorname{arctg} 1/2}^{\pi/4} \int_{1/\sin\varphi}^{5} f\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \int_{1/\cos\varphi}^{5} f\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi.$

Příklad č.3. Zde půjde o aplikaci různých typů integrálu. Dvě ukázky jsou např.

(a) Mějme dáno těleso $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2},\ 0 \le z \le h\}$ a pole $\vec{F} = (y^2 - x, yz^2, x + z)$. Pomocí Gaussovy věty určete velikost parametru $h > 0$ tak, aby tok pole $\vec{F}$ hranicí tělesa P byl číselně roven objemu tělesa P.

Řešení: Protože div$\vec{F} = z^2$ máme v cylindrických souřadnicích

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^h z^2 \varrho\, dz\, d\varrho\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi h^3.$$

(b) Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah množiny omezené osou x a křivkou

$$x = t^2, \quad y = t \ln t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Řešení: Obsah$(D) = 2/9$.

Příklad č.4. Tento příklad bude obsahovat buď rozvoj funkce ve Fourierovu řadu nebo vyšetření konvergence mocninné řady. Ukázky obou typů jsou následující:

(a) Nalezněte Fourierovu řadu pro funkci $f(x) = \max\{0, \cos x\}$; f je 2π-periodická.

Řešení: $\displaystyle\frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \frac{2}{4k^2 - 1} \cos 2kt.$

(b) Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right) x^k,$$

a pomocí derivování nebo integrace nalezněte její součet.

Řešení: $x \in (-1, 1)$ a součet řady je $\dfrac{x}{1-x} - 2\ln(1 - x)$.

Příklad č.5. Zde budou dvě teoretické otázky. Jedna na definici základního pojmu a druhá na důkaz jednoho z tvrzení, které bylo na přednášce.

(a) Definujte diferenciál funkce $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Vysvětlete, co je diferenciál ve speciálním případě $n = 1$?

Řešení: Diferenciál je lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Pro $n = 1$ je $L(h) = f'(x_0) \cdot h$.

(b) Dokažte větu: Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}_0$ lokální minimum a existuje-li v bodě $\mathbf{x}_0$ diferenciál, pak je nulový. (Využijte analogickou větu pro funkci jedné proměnné.)

Řešení: Zvolme libovolný směr $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ a položme $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$. Funkce $\varphi(t)$ má lokální minimum v bodě 0, proto $\varphi'(0) = 0$. Protože

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}], \end{aligned}$$

je $df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}] = 0$ pro každé $\mathbf{h}$, a tedy diferenciál je nulový.