Derivace a diferenciál.

1. Nalezněte parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pro následující funkce:

   (a) $f = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$,

   (b) $f = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,

   (c) $f = (1+\sin^2 x)^{\ln y}$.

   Výsledky:
   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$.
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y\ (1+\sin^2 x)^{\ln y - 1}\sin 2x$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (1+\sin^2 x)^{\ln y}\ \dfrac{1}{y}\ln(1+\sin^2 x)$.

2. Nalezněte parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ pro následující funkce:

   (a) $f = \dfrac{y}{z} + \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}$,

   (b) $f = z^{xy}$,

   (c) $f = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

   Výsledky:
   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{y}{z^2}$,
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z^{xy} y \ln z$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} z^{xy} x \ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy\, z^{xy-1}$,
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z \ln\dfrac{x}{y}$.

3. Nalezněte diferenciály funkce v zadaném bodě.

   (a) $f = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $A = (1, 1)$,

   (b) $f = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1 + x^2}$, $A = (1, -1)$,

   (c) $f = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$, $A = (1, 1, 1)$,

   (d) $f = \ln(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, $A = (1, 2, \ldots, n)$.

   Výsledky:
   (a) $df[h_1, h_2] = h_1 - h_2$,
   (b) $df[h_1, h_2] = \frac{2}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2$,
   (c) $df[h_1, h_2, h_3] = 2h_1 + h_3 \ln 4$,
   (d) $df[h_1, \ldots, h_n] = \dfrac{2}{n(n+1)}\big(h_1 + \cdots + h_n\big)$.

4. Nalezněte tečné (nad)roviny k funkcím v zadaném bodě.

   (a) $z = x \sin(x + y)$, $A = (-1, 1, ?)$,

   (b) $z = 1 + x^2 y^3$, $A = (-1, 1, ?)$,

   (c) $z = y x^y$, $A = (2, 1, ?)$,

   (d) $u = e^{x+xy+xyz}$, $A = (1, -1, -2, ?)$.

   (e) $z^3 + 3xyz + 1 = 0$, $A = (0, 1, ?)$,

   (f) $e^z - xyz - 2 = 0$, $A(1, 0, ?)$,

   (g) $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$, $A = (2, -1, ?)$,

   (h) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$, $A = (0, 1, 0)$,

   (i) $x + y + z = e^{xyz}$, $A = (0, 0, 1)$.

   Výsledky:
   (a) $x + y + z = 0$,
   (b) $2x - 3y + z + 3 = 0$,
   (c) $x + y(2 + 2\ln 2) - z - (2 + 2\ln 2) = 0$,
   (d) $e^2(-2x + y + z) + u + 4e^2 = 0$,
   (e) $-x + z + 1 = 0$,
   (f) $y \ln 2 - 2z + 2\ln 2 = 0$,

(g) $x + 2y + 5z = 0$,
(h) $x \cos 1 + y + z - 1 = 0$,
(i) $x + y + z = 1$.

5. Nalezněte úhel pod kterým se protínají grafy daných funkcí v zadaném bodě.

   (a) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $A = (1, 0, ?)$
   (b) $zx + 2y^2 - 2 = 0$, $z = 2x^2 + y^2$, $A = (1, 0, 2)$.
   (c) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$, $A = (1, 1, 2)$

   Výsledky:
   (a) $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{38}}$, tj. $\alpha \approx 50°$.
   (b) $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{85}}$, tj. $\alpha \approx 41°$.
   (c) $\cos\alpha = 1$, tj. $\alpha = 0$.

6. Zjistěte hodnotu parametru s, aby se plochy $x^2 + y^2 + (z - s)^2 = 18$ a $z = x^2 + y^2$ protínaly pod úhlem $\frac{1}{2}\pi$.

   Výsledek: $s = -2$.

7. Nalezněte tečnou rovinu k ploše S, která je rovnoběžná se zadanou rovinou ϱ.

   (a) plocha S: $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ a rovina ϱ: $2x + 2y + z = 0$,
   (b) plocha S: $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ a rovina ϱ: $x + y - z = 0$.

   Výsledky:
   (a) $2x + 2y + z \pm 4 = 0$.
   (b) Žádná taková tečná rovina neexistuje.

8. Nalezněte tečné přímky ke křivkám zadaným jako průnik dvou ploch v předepsaném bodě.

   (a) plochy $xyz = 1$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ a bod $A = (1, 1, 1)$.
   (b) plochy $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - z = 0$ a bod $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

Výsledky:

(a) $(1,-2,1)t + A$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $(-1,1,0)t + A$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $S:\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, která je

   (a) rovnoběžná s rovinou $x - 2y + 3z = 0$.

   (b) kolmá na roviny $2x - y + z = 0$ a $2x - y - 5z = 0$.

   (c) kolmá na rovinu $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + z\sqrt{2} = 0$ a kolmá na tečnou rovinu k ploše S v bodě $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(3,0,-1)$.

   Výsledky:

   (a) $x - 2y + 3z \pm 6 = 0$,

   (b) $x + 2y \pm 3\sqrt{2} = 0$.

   (c) Tečná rovina k S v bodě A má rovnici $x - z - 2\sqrt{2} = 0$ a hledaná tečná rovina je $x + 2y\sqrt{2/3} + z - 4 = 0$.

10. Ukažte, že všechny tečné roviny k ploše zadané $z - x \sin \dfrac{y}{x} = 0$ se protínají v jednom bodě.

    Výsledek: Procházejí počátkem.

Extrémy funkcí.

Lokální extrémy, stručný postup a ilustrace.

Máme vyšetřit lokální extrémy funkce $f = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y - 6$.

1. Zjistíme stacionární body, tj. body, kde platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

V našem případě to jsou rovnice $x^2 + y^2 = 13$ a $xy = 6$. Jejich řešením jsou čtyři stacionární body $(\pm 3, \pm 2)$ a $(\pm 2, \pm 3)$.

2. Abychom zjistili, zda se v nich nabývá nějaký extrém funkce f, sestavíme tzv. Hessovu matici (nebo krátce hessián):

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Pro zadanou funkci f je to matice

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{H}$ jsou $D_1 = x$ a $D_2 = x^2 - y^2$. Existenci extrémů posoudíme podle následujícího krtitéria:
• Jsou-li všechny hlavní subdeterminaty v daném bodě > 0, má f v tomto bodě minimum.
• Střídají-li hlavní subdeterminaty v daném bodě znaménko s tím, že první subdeterminant $D_1 < 0$, má f v tomto bodě maximum.
• Je-li $\det \mathbb{H} \neq 0$ v daném bodě a neplatí-li ani jedno z výše uvedených pravidel, je v příslušný bod sedlový.

V našem příkladě platí v bodě $(3, 2)$, že $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$, jde tedy o lokální minimum. V bodě $(-3, -2)$ je $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$, jde tedy o lokální maximum. Zbylé body jsou sedlové.

1. Vyšetřete lokální extrémy následujících funkcí.

   (a) $f = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$,
   (b) $f = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$,
   (c) $f = \dfrac{x+y}{xy} - xy$,
   (d) $f = (x + y^2)e^{x/2}$,
   (e) $f = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$,
   (f) $f = x^3 + xy^2 - 6xy = 0$,
   (g) $f = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2)$,
   (h) $f = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$,
   (i) $f = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} + x$,
   (j) $f = y + \dfrac{x^2}{4y} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{2}{z}$.

   Výsledky:

   (a) f má jediný stacionární bod: $(7, -2)$ - minimum.
   (b) f má dva stacionární body: $(1, 2)$ - minimum, $(-1, -2)$ - maximum.

(c) f má jediný stacionární bod: $(-1,-1)$ - maximum.
(d) f má jediný stacionární bod: $(-2,0)$ - minimum.
(e) f má 9 stacionárních bodů: $(0,0)$ - maximum, $(\pm 1/2, \pm 1)$ a $(\mp 1/2, \pm 1)$ jsou minima, zbylé body $(\pm 1/2, 0)$ a $(0, \pm 1)$ jsou sedlové.
(f) f má 4 stacionární body: $(\sqrt{3}, 3)$ - minimum, $(-\sqrt{3}, 3)$ - maximum, body $(0,0)$ a $(0,6)$ jsou sedlové,
(g) f má 5 stacionárních bodů: $(0,0)$ - minimum, $(\pm 1, 0)$ - maximum, $(0, \pm 1)$ - sedlové body.
(h) f má 3 stacionární body: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ - minima, $(0,0)$ nelze určit pomocí kritérií, ale po přímce $y = x$ je v bodě $(0,0)$ minimum a po přímce $y = 0$ je v bodě $(0,0)$ lokální maximum, tj. v $(0,0)$ není extrém.
(i) f má 2 stacionární body: $(1,1,1)$ - minimum, $(-1,1,-1)$ - maximum,
(j) f má 2 stacionární body: $(1, \frac{1}{2}, 1)$ - minimum, $(-1, -\frac{1}{2}, -1)$ - maximum.

Vázané extrémy, stručný postup a ilustrace.

Vyšetříme extrémy funkce $f = x^2 y$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Množina M je zadaná vazebnou podmínkou $g(x,y) = 0$, kde $g = x^2 + y^2 - 1$. Sestavíme tzv. Lagrangeovu funkci $L = f + \lambda g$, v našem přídladě

$$L = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vypočteme stacionární body funkce L, tj. řešíme následující rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Konkrétně, $2xy + 2\lambda y = 0$, $x^2 + 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Řešením je šest bodů $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3})$ a $(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3})$. Protože množina M je uzavřená a omezená, funkce f na ní nabývá minima i maxima. Stačí jen dosadit vypočetné body do funkce f a zjistit, kde má nejmenší a největší hodnotu. Závěr: Maximum je v bodech $(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3})$ a minimum v bodech $(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3})$.

2. Vyšetřete extrémy funkce f na zadané množině M.

   (a) $f = y^2 - x^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$,

(b) $f = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,

(c) $f = e^{x^2 y}$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3y^2 = 3\}$,

(d) $f = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 = 1\}$,

(e) $f = \cos^2 x + \cos^2 y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x - y = \frac{1}{4}\pi\}$,

(f) $f = x - 2y + 2z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$,

(g) $f = xyz$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$,

Výsledky:

(a) $(0, \pm 1)$ - maximum, $(\pm 2, 0)$ - minimum,
(b) v bodech $(1,1)$ a $(-1,-1)$ je minimum, maximum neexistuje, neboť funkce f je shora neomezená na M.
(c) v bodech $(\pm\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$ jsou maxima a v bodech $(\pm\sqrt{2}, -1/\sqrt{3})$ jsou minima.
(d) v bodech $(0, \pm 1)$ a $(\pm 1, 0)$ je minimum a v bodech $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ a $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ je maximum.
(e) body extrémů jsou $(\frac{1}{2}\pi k + \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi k - \frac{1}{8}\pi)$, pro k sudé to jsou maxima a pro k liché minima,
(f) $(-1, 2, -2)$ - minimum, $(1, -2, 2)$ - maximum,
(g) extrémy jsou v bodech (t_1, t_2, t_3), kde $t_i \in \{-1, 1\}$; maxima jsou tam, kde má bod sudý počet záporných souřadnic a minima v bodech s lichým počtem záporných souřadnic.

3. Nalezněte největší objem kvádru víme-li, že

   (a) velikost jeho povrchu je S.

   (b) velikost součtu délek všech jeho stran je a.

   (c) délka tělesové uhlopříčky je d.

   (d) velikost povrchu bez horní stěny je S_0.

   (e) spodní stěna leží v rovině xy a je vepsaný do vnitřku paraboloidu $4x^2 + y^2 + z = 1$.

   (f) kvádr Q je typu $Q = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \times \langle 0, c\rangle$ a vrchol (a,b,c) leží v rovině $2x + y + 3z = 3$.

Výsledek:

Délky hran kvádru označíme x, y, z.

(a) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2yx - S)$. Největší objem je pro $x = y = z = \sqrt{S/6}$.
(b) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(4x + 4y + 4z - a)$. Největší objem je pro $x = y = z = \frac{1}{12}a$.
(c) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - d^2)$. Největší objem je pro $x = y = z = \sqrt{d/3}$.
(d) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(xy + 2yz + 2xz)$. Největší objem je pro $x = y = \sqrt{S_0/3}$ a výšku $z = \frac{1}{2}\sqrt{S_0/3}$.
(e) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda\left(4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z - 1\right)$. Největší objem je pro $x = 1/2$, $y = 1$ a výšku $z = 1/2$.
(f) Lagrangeova funkce je $L = abc + \lambda(2a + b + 3c - 3)$. Největší objem je pro $a = 1/2$, $b = 1$, $c = 1/3$.

4. (Jen pro zájemce.) Mějme kvádr Q typu $Q = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \times \langle 0, c\rangle$ daného objemu V_0. Na kvádr svítí světlo, jehož paprsky mají směr vektoru $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Nalezněte rozměry a, b, c, aby neosvětlená část roviny xy měla co nejmenší obsah.

   Výsledek:

   Obecně je obsah neosvětlené části $S = ab + (ac + bc)/\sqrt{2}$. Lagrangeova funkce je tak $L = S + \lambda(abc - V_0)$. Minimální hodnota velikosti neosvětlené části je při $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2V_0)^{1/3}$, $c = (2V_0)^{1/3}$ a je rovna $\frac{3}{2}(2V_0)^{2/3}$. Funkce S je na množině $abc = V_0$ shora neomezená.

5. Mějme kužel $z = h - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, kde h je jeho výška. Vepište do něj

   (a) válec s podstavou v rovině xy maximálního objemu.

   (b) kvádr s podstavou v rovině xy maximálního objemu.

   Výsledky:

   (a) Poloměr podstavy označíme r a výšku válce v. Lagrangeova funkce je $L = \pi r^2 v + \lambda(v + r - h)$. Největší objem je při $r = \frac{2}{3}h$ a $v = \frac{1}{3}h$.
   (b) Délky hran kvádru si označíme a, b, c. Lagrangeova funkce je tak $L = abc + \lambda(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + c - h)$ Největší objem je pro $a = b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}h$ a výška $c = \frac{1}{3}h$.

6. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y, z) = 2y + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 = 4\}$.

   Výsledek:

   Lagrangeova funkce je $L = 2y + z + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 4)$. Při více vazebných podmínkách jsou stacionární body funkce L řešením soustavy

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0.$$

   V našem případě jsou stacionární body $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. Dosazením do f zjistíme, že v prvním je minimum a ve druhém maximum.

7. Rovina $x + y + 2z = 2$ protíná paraboloid $z = x^2 + y^2$ v nějaké křivce C. Nalezněte na křivce C bod nejblíže a nejdále od počátku.

   Výsledek:

   Lagrangeova funkce je $L = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+2z-2)+\lambda_2(x^2+y^2-z)$ a její stacionární body jsou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $(-1, -1, 2)$. První je nejbližší a druhý je nejvzdálenější.

8. Jakou vzdálenost má přímka $y = 2x$ od křivky $x^2 - y^2 = 3$?

   Výsledek:

   Minimalizujeme vzdálenost dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2), kde první leží na přímce a druhý na křivce, tj. hledáme minimum funkce čtyř proměnných $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Lagrangeova funkce je tak

$$L(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \lambda_1(y_1 - 2x_1) + \lambda_2(x_2^2 - y_2^2 - 3).$$

   Její stacionární body jsou $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \pm(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 2, 1)$ a vzdálenost přímky od křivky je $\sqrt{(\frac{4}{5} - 2)^2 + (\frac{8}{5} - 1)^2} = 3/\sqrt{5}$.

9. (Jen pro opravdové zájemce.) Mějme elipsu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, která obsahuje ve svém vnitřku kružnici o rovnici $(x - s)^2 + y^2 = s^2$. Pro které hodnoty a, b bude tato elipsa ohraničovat nejmenší plochu?

Výsledek:

Bod (x_0, y_0), kde se kružnice a elipsa dotýkají splňuje

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,\ (x_0 - s)^2 + y_0^2 = s^2,\ \frac{x_0}{a^2} = \alpha(x_0 - 2),\ \frac{y_0}{b^2} = \alpha y_0.$$

(Druhé dvě podmínky vyjadřují, že normály k elipse i ke kružnici jsou rovnoběžné.) Jsou to čtyři rovnice pro tři proměnné x_0, y_0, α. Aby měly řešení je nutné splnění podmínky $s^2a^2 = b^2(a^2 - b^2)$. Lagrangeova funkce je tak $L = \pi ab + \lambda(s^2a^2 - b^2(a^2 - b^2))$. Hledané hodnoty jsou $a = 3s/\sqrt{2}$, $b = s\sqrt{3/2}$ a obsah $\frac{3}{2}\pi s^2\sqrt{3}$.