Dvojný integrál.

1. Vypočtěte následující integrály tak, že napíšete obě pořadí integrace a jedno z nich dopočtete.

   (a) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ x^3 \le y \le x^2\};$

   (b) $\displaystyle\iint_D x^2y^2, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y^2 \le x \le 1\};$

   (c) $\displaystyle\iint_D \min\{x,y\}, \quad D = \langle 0,a\rangle^2,\ a > 0;$

   (d) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \in \langle 0,\pi/4\rangle,\ x \operatorname{tg} x \le y \le x\};$

   (e) $\displaystyle\iint_D x + 2y,$ D je omezená přímkami $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$ a $x = 3$;

   (f) $\displaystyle\iint_D |\sin x - y|, \quad D = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,1\rangle.$

   Výsledky:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f\,dydx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,dxdy = \frac{1}{15};$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f\,dydx = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 f\,dxdy = \frac{4}{27};$

   (c) $\displaystyle\int_0^a\int_0^x y\,dydx + \int_0^a\int_x^a x\,dydx = \int_0^a\int_0^y x\,dxdy + \int_0^a\int_y^a y\,dxdy = \frac{a^3}{3};$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^x f\,dydx = \int_0^1 \int_y^{h^{-1}(y)} f\,dxdy = \frac{\pi^2}{32},$ kde $h(x) = x \operatorname{tg} x;$

   (e) $\displaystyle\int_2^3\int_x^{2x} f\,dydx = \int_2^3\int_2^y f\,dxdy + \int_3^4\int_2^3 f\,dxdy + \int_4^6\int_{y/2}^3 f\,dxdy = \frac{76}{3};$

   (f) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{\sin x} (\sin x - y)\,dydx + \int_0^\pi \int_{\sin x}^1 (\sin x - y)\,dydx =$

$$= \int_0^1 \int_0^{\arcsin y} (y - \sin x) dx dy + \int_0^1 \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} (y - \sin x) dx dy +$$
$$+ \int_0^1 \int_{\arcsin x}^{\pi - \arcsin x} (\sin x - y)\, dx dy = \pi - 2.$$

2. Napište následující integrály v opačném pořadí integrace.

   (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f\ dydx;$

   (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{3-y} f\ dxdy;$

   (c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{a} f\ dydx$, kde $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4x});$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f\ dxdy + \int_{-\sqrt{2}/2}^{0} \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f\ dxdy;$

   (e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^{\cos x} f\ dydx;$

   (f) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\cos x}^{\sin x} f\ dydx;$

   (g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f\ dydx;$

   Výsledky:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f\ dxdy;$

   (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{3-x} f\ dydx;$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y+y^2} f\ dxdy;$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{-x}^{x} f\ dydx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f\ dydx;$

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\arccos y}^{\arccos y} f\ dxdy;$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{\arccos y}^{\pi} f\ dxdy + \int_{0}^{1}\int_{\pi/2}^{\pi-\arcsin y} f\ dxdy;$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f\ dxdy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f\ dxdy.$

3. Načrtěte obrázek množiny D a pomocí polárních souřadnic vypočtěte $\iint_D f$.

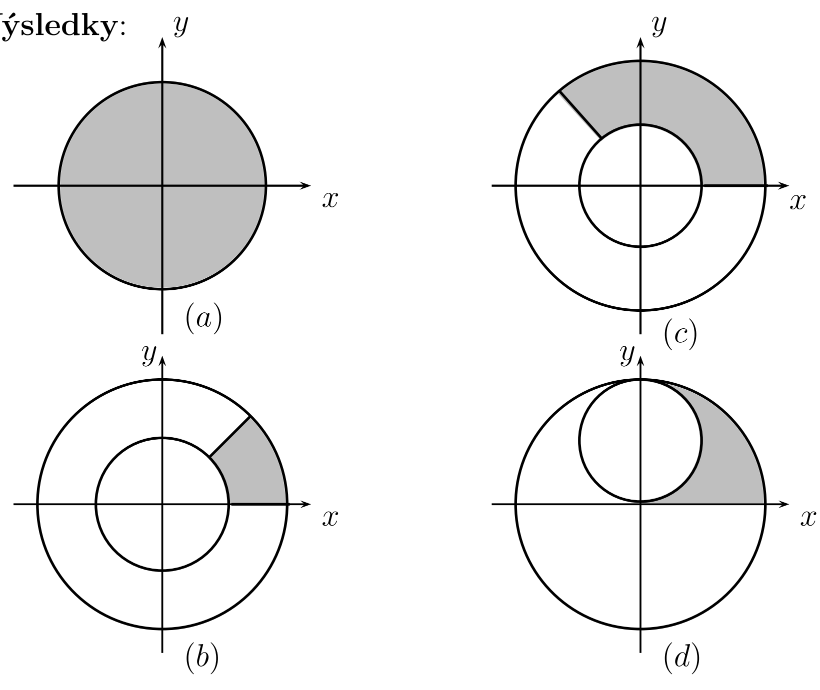
   (a) $\displaystyle\iint_D xy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\};$

   (b) $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\};$

   (c) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x + y \geq 0,\ y \geq 0\};$

   (d) $\displaystyle\iint_D x,$
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 - 2y \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\};$

Výsledky:



(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \varrho^2 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varrho d\varphi = 0;$

(b) $\int_0^{\pi/4} \int_1^2 \varphi\varrho \, d\varrho d\varphi = \frac{3\pi^2}{64};$

(c) $\int_0^{3\pi/4} \int_{\sqrt{3}}^3 \varrho \cos\varphi \, d\varrho d\varphi = \frac{3}{2}\sqrt{2};$

(d) $\int_0^{\pi/2} \int_{2\sin\varphi}^2 \varrho^2 \cos\varphi \, d\varrho d\varphi = 2.$

4. Napište následující integrály v polárních souřadnicích v pořadí integrace $d\varrho d\varphi$.

   (a) $\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f \, dydx;$

   (b) $\int_0^2 \int_0^x f \, dydx;$

   (c) $\int_0^1 \int_{-y}^y f \, dxdy;$

   (d) $\int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{bx-x^2}} f \, dydx + \int_a^b \int_0^{\sqrt{bx-x^2}} f \, dydx$, $0 < a < b$.

   Výsledky:

   (a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^r f\varrho, d\varrho d\varphi;$

   (b) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos\varphi} f\varrho \, d\varrho d\varphi;$

   (c) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{1/\sin\varphi} f\varrho \, d\varrho d\varphi;$

   (d) $\int_0^{\pi/2} \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} f\varrho \, d\varrho d\varphi.$

5. Nalezněte těžiště následujících množin.

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq 2 - y\}$, hustota $f = 1$;

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}\}$, hustota $f = 1$;

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2ax\}$, hustota $f = \sqrt{x^2+y^2}$.

Výsledky:
(a) $t = (8/5, -1/2)$;
(b) $t = (a/5, a/5)$;
(c) $t = (6a/5, 0)$.

6. Kruhový bazén má poloměr $3\,m$. Ve směru severo-jižním je jeho hlouka konstantní a ve směru východo-západním lineárně roste z hodnoty $0.5\,m$ na východním konci k hodnotě $2.5\,m$ na západním konci. Zjistěte jaký objem vody bazén pojme.

   Výsledek:
   $V = \iint_D (\frac{x}{3} + \frac{3}{2}) = \frac{27}{2}\pi\, m^3$, kde $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 9\}$.

7. Horní polovinu elipsy $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ y \geq 0\right\}$ volně zavěsíme v bodě $(a,0)$. Zjistěte, jaký úhel bude svírat spojnice bodů $(-a,0)$ a $(a,0)$ se svislým směrem.

   Výsledek:
   K výpočtu užijeme tzv. eliptické souřadnice, což je modifikace polárních souřadnic: $\Phi = (a\varrho\cos\varphi,\, b\varrho\sin\varphi)$, $\Delta_\Phi = ab\varrho$. Těžiště je $t = (0, \frac{4b}{3\pi})$ a úhel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4b}{3\pi a}$.

8. V disku o poloměru R vyřízneme kruhový otvor s poloměrem $a/2$, $a \leq R$ tak, že se kraj otvoru dotýká středu disku. Jaký je moment setrvačnosti tohoto disku vzhledem k jeho středu, je-li plošná hustota rovna vzdálenosti od středu?

   Výsledek:
   Střed disku umístíme do počátku a střed otvoru do bodu $a/2$ na ose x. Hustota je $f = \sqrt{x^2+y^2}$ a moment setrvačnosti $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^{3/2} = \dfrac{2\pi R^5}{5} - \dfrac{16a^2}{75}$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ x^2+y^2 \geq ax\}$.

Trojný integrál.

1. Vypočtěte následující trojné integrály, s možným využitím cylindrických nebo sférických souřadnic.

(a) $\displaystyle\iiint_P z, \quad P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+2y+z \le 2,\ x,y,z \ge 0\};$

(b) $\displaystyle\iiint_P z, \quad P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2+4y^2 \le z \le 4\};$

(c) $\displaystyle\iiint_P y, \quad P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y \le 1,\ y+z \le 1,\ x,y,z \ge 0\};$

(d) $\displaystyle\iiint_P x^2+y^2+z^2, \quad P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ z \ge 0\};$

(e) $\displaystyle\iiint_P |z|, \quad P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$

Výsledky:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} z\ dzdydx = \frac{1}{6};$

(b) V cylidrických souřadnicích je $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4\varrho^2}^4 z\varrho\ dzd\varrho d\varphi = \frac{16\pi}{3};$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} y\ dzdydx = \frac{1}{12};$

(d) Ve sférických souřadnicích je $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r \varrho^4 \sin\theta\ d\varrho d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{5} r^5;$

(e) V cylindrických souřadnicích je $\displaystyle 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} z\varrho\ dzd\varrho d\varphi = \frac{7\pi}{2}.$

2. Vypočtěte hmotnost tělesa ležícího mezi dvěma sférami $x^2+y^2+z^2 = r^2$ a $x^2+y^2+z^2 = 4r^2$, je-li hustota nepřímo úměrná vzdálenosti od středu sfér s koeficientem κ.

   Výsledek:

   Ve sférických souřadnicích $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_a^{2r} \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{\varrho} \varrho^2 \sin\theta\ d\varphi d\varrho d\theta = 6\pi\kappa r^2.$

3. Těleso ležící v 1. oktantu je omezeno následujícími plochami $x+y = a$, $x+y-z+a = 0$. Zjistěte hodnotu $a > 0$, aby objem byl roven 20/3.

   Výsledek:

   $\displaystyle\int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{x+y+a} 1\ dzdydx = \frac{5a^3}{6}$. Hledaná hodnota je $a = 2$.

4. Trojbokou pyramidu $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$ s hustotou $f = z$ rozděluje rovina $x = a$ na dvě části se stejnými hmotnostmi. Určete hodnotu a.

   Výsledek:
   Musí platit $\displaystyle\int_0^a \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dzdydx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dzdydx$. Odtud $a = 1 - 1/\sqrt[4]{2}$.

5. (Jen pro zájemce). Zjistěte objem množiny, která vznikla průnikem tří na sebe kolmých válců $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq a^2\}$, $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

   Výsledek:
   Označíme-li D čtvrtkruh s poloměrem a ležící v 1. kvadrantu, pak objem je $\displaystyle V = 8 \iint_D \min\{\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - y^2}\} = \frac{8a^3}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)$.