Křivkový integrál.

1. Vypočtěte následující křivkové integrály.

   (a) $\int_C x + y + z \; ds$, kde C je helix (= šroubovice) s parametrizací $\varphi(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a, b \geq 0$;

   (b) $\int_C \sqrt{1 + 9xy} \; ds$, kde C je graf $y = x^3$, $x \in \langle 0, 1\rangle$;

   (c) $\int_C xy - z^2 \; ds$, kde C jsou dvě navazující úsečky, první z bodu $(0, 0, 1)$ do bodu $(0, 2, 0)$ a druhá z bodu $(0, 2, 0)$ do bodu $(1, 1, 1)$;

   (d) $\int_C (x - y)^2 \; ds$, kde C je horní část kružnice $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$.

   Výsledky.

   (a) $\int_0^{2\pi} (a\cos t + a\sin t + bt)\sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \frac{1}{2}\pi^2 b\sqrt{a^2 + b^2}$;

   (b) Parametrizace je $\varphi(x) = (x, x^3)$ a $\int_0^1 (1 + 9x^4) \; dx = 14/5$;

   (c) Parametrizace první úsečky je $\varphi_1(t) = (0, 2t, 1 - t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a druhé úsečky $\varphi_2(t) = (t, 2 - t, t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Pak
   $\int_0^1 -(1 - t)^2\sqrt{5} \; dt + \int_0^1 \big(t(2 - t) - t^2\big)\sqrt{3}\, dt = \frac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$;

   (d) Parametrizace je $\varphi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a
   $\int_0^{\pi} (1 + \cos t - \sin t)^2 dt = 2\pi - 4$.

2. Drát ve tvaru šroubovice $\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t, t^2)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ má hustot $f = \sqrt{z}$. Jaká je jeho hmotnost?

   Výsledek:

   $$\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1 + t^2} \; dt = \frac{2}{3}(\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1).$$

3. Základna plotu je kruh s poloměrem $5\,m$, $x^2 + y^2 = 25$, a výška plotu v bodě (x, y) je $h(x, y) = 2 + \dfrac{x^2 - y^2}{250}$. Pokud jeden litr barvy vystačí

na obarvení $10\,m^2$, kolik litrů je třeba k obarvení plotu z obou stran?

Výsledek:

Plocha plotu je $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(2+\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{10}\Big)5\;dt = 20\pi$, a tedy stačí $2\pi \approx 6.3\,l$ barvy.

4. Drát ve tvaru spirály C na plášti kužele má parametrizaci $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$, a hustotu $f(x,y,z) = 1/\sqrt{2+z^2}$. Nalezněte moment setrvačnosti vzhledem k ose z.

   Výsledek:

   Parametrizace je $\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ a $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2+t^2}$. Pak $I = \displaystyle\int_C (x^2+y^2)f\;ds = \int_0^{4\pi} t^2\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\sqrt{2+t^2}\;dt = \frac{64}{3}\pi^3$.

5. Mějme úsečku C z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,1)$. Pro které pole $\vec{F}(x,y)$ je integrál přes C nulový?

   (a) $\vec{F}(x,y) = (0,x)$;

   (b) $\vec{F}(x,y) = (x,0)$;

   (c) $\vec{F}(x,y) = (0,y)$;

   (d) $\vec{F}(x,y) = (y,0)$.

   Výsledek: Parametrizace je $\varphi(t) = (0,t)$, $t \in \langle 0,1\rangle$ a $\varphi'(t) = (0,1)$. Skalární součin $\vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = 0$ v případech (a), (b) a (d). Jediný nenulový integrál je v případě (c) a jeho hodnota je $1/2$.

6. Vypočtěte následující křivkové integrály $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\,d\vec{s}$:

   (a) $\vec{F}(x,y) = (x^3, xy)$ a (C) je část kružnice $x^2+y^2 = 4$, $x,y \ge 0$, kladně orientovaná;

   (b) $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ a (C) je graf funkce $y = x^3$ vedoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, y-z, z^2)$ a oblouk (C) má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, t^3, t^2)$, $t \in \langle 0,1\rangle$;

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, x, -y)$ a (C) je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ a $C = (0,0,1)$ orientovaný $A \to B \to C \to A$.

Výsledky:

(a) Parametrizace je $\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ a
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (-16\cos^3 t + 8\cos^2 t)\sin t\,dt = -\frac{4}{3}$;

(b) Parametrizace je $\varphi(t) = (t, t^3)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a $\displaystyle\int_0^1 5t^4\,dt = 1$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 (5t^5 - t^4 + 2t^3)\,dt = \frac{17}{15}$;

(d) Strana AB má parametrizaci $\varphi_1(t) = (1-t, t, 0)$, strana BC má $\varphi_2(t) = (0, 1-t, t)$ a strana CA má parametrizaci $\varphi_3(t) = (t, 0, 1-t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Dostaneme $\displaystyle\int_0^1 0\,dt + \int_0^1 (-1+t)\,dt + \int_0^1 1\,dt = \frac{1}{2}$.

7. Jakou práci vykoná pole $\vec{F}(x,y) = \dfrac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ podél kladně orientované kružnice:

   (a) $x^2 + y^2 = a^2$;

   (b) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

   Výsledek:

   (a) Parametrizace je $\varphi(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a
   $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\,dt = 2\pi$, (výsledek nezávisí na poloměru a);

   (b) Parametrizace je $\varphi(t) = (2+\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a
   $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}\,dt$. Tento integrál je třeba řešit substitucí $x = \mathrm{tg}\,(t/2)$.
   Tím dostaneme integrál $\displaystyle 2\int_0^{\infty}\Big(-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx = 0$.

Plošný integrál.

1. Vypočtěte následující plošné integrály.

(a) $\displaystyle\iint_M x^2\, dS$, kde M je část roviny $2x+2y+z=4$ v 1. oktantu;

(b) $\displaystyle\iint_M (x+y+z)\, dS$, kde M je část sféry $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$;

(c) $\displaystyle\iint_M (x^2+y^2+z^2)\, dS$, kde M je plášť kužele $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\leq 1$;

(d) $\displaystyle\iint_M z^2\, dS$, kde $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4,\ 0\leq z\leq 1\}$;

(e) $\displaystyle\iint_M (x+z^2y)\ dS$, kde M je část válce $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 3$, ležící v 1. oktantu;

(f) $\displaystyle\iint_M (x^2+y^2)z\ dS$, kde M je část kužele $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\in\langle a,b\rangle$.

Výsledky:

(a) M je graf funkce $z=4-2x-2y$, nemusíme hledat parametrizaci; $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-x} x\ dydx=2$;

(b) M je graf funkce $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, nemusíme tak hledat parametrizaci; $\displaystyle\iint_K \frac{x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\pi$, kde K je kruh $x^2+y^2\leq\ 1$. Pokud přesto chceme M parametrizovat, použijeme sférické souřadnice: $\Phi(\varphi,\vartheta)=(\sin\vartheta\cos\varphi,\sin\vartheta\sin\varphi,\cos\vartheta)$. Pak $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right\|=\sin\vartheta$ a dostaneme $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\big(\sin\vartheta\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi+\cos\vartheta\big)\sin\vartheta\ d\varphi d\vartheta=\pi$.

(c) $\displaystyle\iint_K (2x^2+2y^2)\sqrt{2}=\pi\sqrt{2}$, kde K je kruh $x^2+y^2\leq 1$;

(d) M je graf funkce $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, nemusíme hledat parametrizaci; $\displaystyle\iint_K \sqrt{4-x^2-y^2}=\frac{2\pi}{3}$, kde $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3\leq x^2+y^2\leq 4\}$;

(e) Pro parametrizaci plochy M užijeme cylindrické souřadnice: $\Phi(\varphi,z)=(\cos\varphi,\sin\varphi,z)$, $(\varphi,z)\in\langle 0,\pi/2\rangle\times\langle 0,3\rangle$. Pak $\left\|\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right\|=1$ a $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^3(\cos\varphi+z^2\sin\varphi)\ dzd\varphi=12$.

(f) Pro parametrizaci plochy M užijeme cylindrické souřadnice: $\Phi(\varphi,\varrho) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho)$, $(\varphi,\varrho) \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle a, b\rangle$. Pak dostaneme $\left\|\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right\| = \sqrt{2}\varrho$ a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{2}\varrho^4 \; d\varrho d\varphi = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(b^5 - a^5)$.

2. Určete těžiště množiny $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2,\ z \geq 0\}$, je-li hustota $f = 1$.

   Výsledek:

   M je graf funkce $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, nemusíme hledat parametrizaci. Těžiště je $(0,0,t_z)$, kde $t_z = \dfrac{1}{2\pi r^2}\displaystyle\iint_M z\; dS = \dfrac{1}{2\pi r^2}\iint_K r = \dfrac{r}{2}$ a K je kruh $x^2 + y^2 \leq r^2$.

3. Vypočtěte následující integrály vektorového pole $\displaystyle\iint_{(M)} \vec{F}\, d\vec{S}$.

   (a) M je kruh $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$ orientovaný normálou s kladnou z-tovou složkou a $\vec{F}(x,y,z) = (0, 0, x^2 + y^2)$.

   (b) M je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$ s orientací v kladném směru osy z a $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, x^2 + y^2)$.

   (c) M je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ležící v 1. oktantu s orientací směrem od počátku a $\vec{F}(x,y,z) = (x, -z, y)$.

   Výsledky:

   (a) M je graf funkce $z = 0$ nad kruhem $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$. Normála je $(0,0,1)$ a tak $\displaystyle\iint_D x^2 + y^2 = 8\pi$.

   (b) Užijeme cylindrických souřadnic $\Phi(\varphi,\varrho) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho^2)$. Pak $\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2\varrho^2\cos\varphi, -2\varrho^2\sin\varphi, \varrho)$ a máme $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3 \; d\varrho d\varphi = 2\pi$.

   (c) Sférické souřadnice $\Phi(\varphi,\vartheta) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ dávají $\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = r^2(\sin^2\vartheta\cos\varphi, \sin^2\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta\cos\vartheta)$. Pak dostaneme $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^3\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\; d\vartheta$
   $\frac{1}{6}\pi r^3$.

4. Funkce $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ udává rozložení teploty v prostoru. Tepelný tok je vektorové pole $\vec{F} = -\operatorname{grad} T$. Zjistěte tepelný tok sférou

$M: \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientovanou vnější normálou.

Výsledek:

Tok $\vec{F}$ je $\vec{F} = -2(x, y, z)$ a

$$\iint_{(M)} \vec{F}\, d\vec{S} = -2 \iint_M (x, y, z)\, \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}\, dS = 4\pi a^3.$$

Integrální věty.

1. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte tok pole $\vec{F}$ orientovanou plochou (M):

   (a) $\vec{F} = (0, 0, \frac{1}{3}z^3)$ a plocha M je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ orientovaná vnější normálou;

   (b) $\vec{F} = (x, y^2, y+z)$ a plocha M je hranice tělesa omezeného plochami $x^2 + y^2 = 4$, $z = x$ a $z = 8$ a orientovaná vnější normálou;

   (c) $\vec{F} = (xy^2 + \cos z, xe^{-z}, x^2 z)$ a plocha M je hranice paraboloidu $x^2 + y^2 \le z \le h$ orientovaná vnější normálou.

   Výsledky:

   (a) Použijeme sférické souřadnice:
   $$\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \int_0^{\pi} \int_0^{r} \int_0^{2\pi} \varrho^4 \cos^2\theta \sin\theta \; d\varphi\, d\varrho\, d\theta = \frac{4\pi}{15} r^5;$$
   (b) Použijeme cylindrické souřadnice:
   $$\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{\varrho\cos\varphi}^{8} (2 + 2\ rho \sin\varphi)\varrho\ dz\, d\varrho\, d\varphi = 64\pi;$$
   (c) Použijeme cylindrické souřadnice:
   $$\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \int_{\varrho^2}^{h} \varrho^3\ dz\, d\varrho\, d\varphi = \frac{\pi h^3}{6}.$$

2. Pomocí Greenovy věty spočtěte integrály vektorového pole $\vec{F}$ podél orientované křivky (C):

   (a) $\vec{F} = (y^2, x^2)$ a C je hranice čtverce $\langle 0, 1\rangle^2$ kladně orientovaná.

   (b) $\vec{F} = (x+y, x^2-y)$ a C je hranice oblasti omezené křivkami $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$, kladně orientovaná.

   (c) $\vec{F} = (xy^2, 2x^2y)$ a C je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 2)$ a $(2, 4)$, kladně orientovaný.

(d) Vhodnou volbou pole $\vec{F}$ zjistěte obsah množiny ohraničené křivkou s parametrizací $\varphi(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ kladně orientovanou.

(e) Vhodnou volbou pole $\vec{F}$ zjistěte obsah množiny ohraničené kladně orientovanou křivkou skládající se z oblouku $\varphi(t) = (t - t^2, e^t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a osy y.

Výsledky:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 2x - 2y \; dxdy = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2x - 1 \; dydx = -\frac{1}{30}$;

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{2x} 2xy \; dydx = 12$;

(d) Volíme např. $\vec{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$ (nebo $\vec{F} = (0, x)$ nebo $\vec{F} = (-y, 0)$). Pak obsah je $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \pi ab.$

(d) Nejvýhodnější volba je $\vec{F} = (-y, 0)$. Křivka se skládá z oblouku C s parametrizací φ a z úsečky na ose y od bodu $(0, e)$ do bodu $(0, 1)$. $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = -\int_0^1 e^t(1 - 2t)\, dt = 3 - e$. Integrál přes úsečku je nulový, neboť $\vec{F}$ je kolmé na úsečku. Tím obsah $= 3 - e$.

3. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte tok pole rot $\vec{F}$ zadanou plochou M:

(a) $\vec{F} = (x^2z^2, y^2z^2, xyz)$ a plocha je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = r^2$ orientovaná normálou směřující dolu.

(b) $\vec{F} = (y, y - x, z^2)$ a M je část sféry $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ ležící nad rovinou xy a orientované vnější normálou.

Výsledky:

(a) Parametrizace křivky (C) je $\varphi(t) = (-r\cos t, r\sin t, r^2)$ a $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} r^4(\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) dt = 0.$

(b) Parametrizace křivky (C) je $\varphi(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ a
$$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = 9\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \sin t\cos t - \cos^2 t)dt = -18\pi.$$

4. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál pole $\vec{F}$ podél orientované křivky (C):

   (a) $\vec{F} = (2z + x, y - z, x + y)$ a C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$ orientovaný podle uvedeného pořadí vrcholů.

   (b) $\vec{F} = (-y, x, 2z^2)$ a C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ v rovině $z = 2$.

   (c) $\vec{F} = (x, y, xy)$ a křivka C je kraj plochy paraboloidu $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 \leq 4$ a orientovaného normálou s kladnou z-tovou souřadnicí.

   Výsledky:

   (a) $\operatorname{rot} F = (2,1,0)$ a $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D (2,1,0)\cdot(1,1,1) = \frac{3}{2}$, kde D je trojúhelník $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x, y \geq 0\}$.

   (b) K použití Stokesovy věty je třeba si ještě zvolit plochu M, jejíž kraj je daná kružnice: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = 2\}$ s orientací $\vec{n} = (0,0,1)$. Protože $\operatorname{rot} \vec{F} = (0,0,2)$, máme
$$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi a^2.$$

   (c) Plocha M s daným krajem C je graf funkce $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ nad kruhem $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Normálový vektor ke grafu je $\vec{n} = (-x/2, -2y/9, 1)$ a $\operatorname{rot} \vec{F} = (x, -y, 0)$. Pak
$$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D (x, -y, 0)\cdot(-x/2, -2y/9, 1) = -\frac{10}{9}\pi.$$

Potenciální pole.

1. Zjistěte, která z následujících polí jsou potenciální a v kladném případě nalezněte jejich potenciál.

   (a) $\vec{F} = (2xy^2 + 2, 2yx^2 + 3y^2)$;

(b) $\vec{F} = (x^3 - y, x - y^3)$;

(c) $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+2)^2}, \dfrac{y}{(x^2+y^2+2)^2}\right)$;

(d) $\vec{F} = (x, -2y, 3z)$;

(e) $\vec{F} = (xz, yz, xy)$;

(f) $\vec{F} = (1 + yz\cos xy, xz\cos xy, -2z + \sin xy)$.

Výsledky:

(a) $f = x^2y^2 + 2x + y^3 + C$;

(b) Není potenciální.

(c) $f = -\dfrac{1}{2(x^2+y^2+2)} + C$;

(d) $f = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C$;

(e) Není potenciální.

(f) $f = z\sin xy + x - z^2 + C$.

2. Pro které hodnoty a, b je pole $\vec{F} = (-xy + x, ax^2 + by)$ potenciální? Nalezněte jeho potenciál.

   Výsledek:

   Podmínka je $2ax = -x$, tj, $a = -\frac{1}{2}$. Hodnota b je libovolná. Potenciál $f = \frac{1}{2}x^2(1-y) + \frac{1}{2}by^2 + C$.

3. Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby pole $\vec{F} = (e^y + y\sin x, g(x) + xe^y)$ bylo potenciální. Určete jeho potenciál.

   Výsledek:

   $g(x) = -\cos x$ a potenciál je $f = xe^y - y\cos x + C$.