Mocninné řady.

1. U následujících mocninných řad určete jejich střed a vypočtěte poloměr konvergence.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)3^n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{(n+1)^2 2^n}$;

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n! x^n}{n^n}$;

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{\sqrt{n}}(x+5)^n}{n}$;

   (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(1-(-2)^n\big)(x+1)^n$;

   (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2}(x-1)^n$, $0 < a < 1$;

   Výsledky:

   (a) $R = 3$, $x_0 = 0$, (b) $R = 2$, $x_0 = -2$, (c) $R = e$, $x_0 = 0$, (d) $R = 1$, $x_0 = 0$, (e) $R = 1/2$, $x_0 = -1$, (f) $R = \infty$, $x_0 = 1$.

2. Pro uvedené mocninné řady určete jejich poloměr konvergence a s pomocí derivování nebo integrace zjistěte jejich součet $s(x)$.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}$;

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n\, x^n$;

   (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n}}{n!}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{5^n} + n\Big) x^n$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$;

Výsledky:

(a) $s(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $R = 1$; (b) $s(x) = \ln(1-2x)$, $R = 1/2$;
(c) $s(x) = -\dfrac{x}{(1+x)^2}$, $R = 1$; (d) $s(x) = e^{-3x}$, $R = \infty$;
(e) $s(x) = \dfrac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$, pro $x \neq 1$ a $s(1) = \frac{1}{2}$, $R = \infty$;
(f) $s(x) = \dfrac{5}{5-x} + \dfrac{x}{(1-x)^2}$, $R = 1$; (g) $s(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$, $R = 1$.

3. Pomocí rozvojů základních elementárních funkcí nalezněte pro následující funkce Taylorovy řady se zadaným středem a určete poloměr konvergence.

(a) $f(x) = 2^x$ se středem $x_0 = 0$ a se středem $x_0 = 1$.

(b) $f(x) = \cos^2 x$ se středem $x_0 = 0$ a se středem $x_0 = \frac{1}{4}\pi$.

(c) $f(x) = \sin^3 x$ se středem $x_0 = 0$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x - 2x^2}$ se středem $x_0 = 0$ a se středem $x_0 = -1$.

(e) $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$ se středem $x_0 = 0$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 7}$ se středem $x_0 = -2$.

Výsledky:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!}\, x^n, \quad 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!}\,(x-1)^n$, $R = \infty$;

(b) $\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}\, x^{2n}, \quad \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}\,(x - \tfrac{1}{4}\pi)^{2n+1}$, $R = \infty$;

(c) $\dfrac{3}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$, $R=\infty$;

(d) $f(x)=\dfrac{x}{3}\Big(\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x-1}\Big)$, $\quad\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-2)^{n+1})\,x^{n+1}$, $R=1/2$,

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+2^{-n})(x+1)^n$, $R=1/2$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,x^{2n}$, $R=1$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,(x+2)^{2n}$, $R=\sqrt{3}$.

4. Pomocí derivování nebo integrování určete Taylorovy rozvoje zadaných funkcí a poloměry konvergence.

   (a) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$ se středem $x_0=-1$.

   (b) $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$ se středem $x_0=0$.

   Výsledky.

   (a) $2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{1/2}{n}(x-4)^n$, $R=4$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)}\,x^{2n}$, $R=1$.

Fourierovy řady.

1. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické funkce f, která má na intervalu $\langle 0,2\pi)$ zadaný předpis a vyšetřete ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f.

   (a) $f(x)=|\cos x|$;

   (b) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\langle 0,\pi),\\ 0, & x\in\langle \pi,2\pi);\end{cases}$

   (c) $f(x)=x^2$;

   (d) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\in\langle 0,\pi),\\ 0, & x\in\langle \pi,2\pi).\end{cases}$

Výsledky.

(a) $\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx$, řada reprezetuje funkci všude;

(b) $\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$, řada reprezentuje funkci všude mimo body $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. V bodech $(2k+1)\pi$ má řada hodnotu $\pi/2$;

(c) $\dfrac{4\pi^2}{3}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}\cos nx-\dfrac{4\pi}{n}\sin nx\right)$, řada reprezentuje funkci všude mimo body $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. V bodech $2\pi k$ má řada hodnotu $2\pi^2$;

(d) $\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$, řada reprezentuje funkci všude mimo body πk, $k\in\mathbb{Z}$. V bodech πk má řada hodnotu $(-1)^k/2$.

2. Vyjádřete následující funkce ve tvaru sinové Fourierovy řady.

   (a) $f(x)=\cos 2x$, $x\in\langle 0,\pi)$;

   (b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\langle 0,\frac{1}{2}\pi),\\ 0, & x\in\langle\frac{1}{2}\pi,\pi).\end{cases}$

   Výsledky.

   (a) $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(2n+3)(2n-1)}\sin(2n+1)x$, řada reprezentuje funkci všude mimo πk, $k\in\mathbb{Z}$. V bodech πk má řada hodnotu 0.

   (b) $\frac{1}{2}\sin x+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin 2nx$, řada reprezetuje funkci všude mimo $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. V bodech $\frac{1}{2}(2k+1)\pi k$ má řada hodnotu $(-1)^k/2$.

3. Vyjádřete následující funkce ve tvaru kosinové Fourierovy řady.

   (a) $f(x)=x$, $x\in\langle 0,\pi)$;

   (b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi-x, & x\in\langle 0,\frac{1}{2}\pi),\\ 0, & x\in\langle\frac{1}{2}\pi,\pi).\end{cases}$

   Výsledky.

(a) $\displaystyle \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$, řada reprezetuje funkci všude.

(b) $\displaystyle \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{1}{4}\pi n)}{n^2} \cos nx$, řada reprezetuje funkci všude.