Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (02.09.2024)

Jméno: .... Podpis: ....

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r.
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r.
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2\sin\theta$.

Zadání

1. [10 bodů] Je dáno potenciálové vektorové pole
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(e^{2y} + y\cos x, \sin x + 2xe^{2y} - y\right).$$
   (a) Nalezněte potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ splňující $f(0,1) = 0$.
   (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél orientované křivky C, jejíž parametrizace je $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t - t^2, 1 - t)$, $t \in [0,1]$.

2. [10 bodů] Nalezněte všechny body minima a body maxima funkce
$$f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 2x$$
na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. [10 bodů] Záměnou pořadí integrace vypočtěte
$$\int_0^1 \int_{\frac{y}{2}-1}^{y-1} e^{\frac{x^2}{2}+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\frac{y}{2}-1}^{0} e^{\frac{x^2}{2}+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. [10 bodů] Ať kompaktní množina M je část válce $x^2 + y^2 \leq 4$ ležící mezi rovinami $z = -1$ a $z = 3$. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál vektorového pole
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(y^2, x - z^2, (z-1)^2\right)$$
přes plochu $S = \partial M$ orientovanou vnějším normálovým polem.

5. [10 bodů] Je dána funkce
$$f(x) = \frac{1}{2x+5}.$$
   (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady se středem v bodě -1 a určete její poloměr konvergence.
   (b) Nalezněte rozvoj funkce $f'(x)$ do mocninné řady se středem v bodě -1 a určete její poloměr konvergence.