Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (26.06.2024)

Jméno: .... Podpis: ....

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r.
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r.
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2\sin\theta$.

Zadání

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(x,y) = ye^{x^2-y} + \ln(xy).$$

Nalezněte všechny jednotkové vektory $\boldsymbol{h}$ takové, že $\nabla_{\boldsymbol{h}} f(1,1) = 1$.

2. [10 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x,y) = x^4 - x^2 y + \frac{y^2}{2} - y.$$

3. [10 bodů] Vypočtěte

$$I = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^y x e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{2z^{3/2}}{3} + 2z} \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \int_1^2 \int_0^{(y-2)^2} x e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{2z^{3/2}}{3} + 2z} \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

pomocí záměny pořadí integrace takové, že vnitřní integrace bude přes proměnnou x, prostřední integrace bude přes proměnnou y a vnější integrace bude přes proměnnou z.

4. [10 bodů] Je dáno vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(e^{x+y}, xz, yz\right)$$

a plocha $S \subseteq \mathbb{R}^3$, která je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ ležící v poloprostoru $x \geq 2$. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte plošný integrál vektorového pole $\nabla \times \boldsymbol{F}$ přes plochu S orientovanou jednotkovým normálovým polem s nezápornou první složkou.

5. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Nalezněte Fourierovu řadu funkce f a dále určete součet této řady na intervalu $[\pi, 3\pi)$.