1. semestrální test (varianta A)

Jméno a příjmení: ....

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Je dána funkce

$$f(x,y) = x\sin(\pi y) - \ln x.$$

   (a) Určete jednotkový vektor udávající směr největšího růstu funkce f v bodě $(1,2)$.

   (b) Nalezněte Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(1,2)$.

2. [5 bodů] Na křivce o rovnici

$$x^2 + 2xy + 5y^2 = 1$$

   nalezněte nejnižší bod (tj. bod s nejmenší druhou souřadnicí).

1. semestrální test (varianta B)

Jméno a příjmení: ....

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Je dána funkce

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

   (a) Nalezněte definiční obor funkce f a hladinu funkce f výšky 0, kterou načrtněte.

   (b) Ať $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je třídy C^1, $\boldsymbol{\varphi}(3) = (-1,1)$, $\boldsymbol{\varphi}'(3) = (1,3)$ a $g(t) = f(\boldsymbol{\varphi}(t))$. Pomocí řetízkového pravidla vypočtěte $g'(3)$.

2. [5 bodů] Nalezněte a klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x,y) = x^4 - 2xy + y^2.$$

2. semestrální test (varianta A)

Jméno a příjmení: ....

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

   pomocí vyjádření v polárních souřadnicích tak, aby vnitřní integrace byla přes proměnnou r.

2. [5 bodů] Vypočtěte křivkový integrál funkce

$$f(x,y) = x - 2y^2$$

   podél úsečky C s krajními body $(2,0)$ a $(0,1)$.

2. semestrální test (varianta B)

Jméno a příjmení: ....

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Záměnou pořadí integrace vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}-2}^{-1} \frac{x}{(x+2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

2. [5 bodů] Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x,y) = (-xy, x^2)$$

   podél křivky C, která je průnikem kružnice $\|(x,y)\| = 2$ s prvním kvadrantem, její počáteční bod je $(2,0)$ a koncový bod je $(0,2)$.

Stručná řešení

1. semestrální test (varianta A)

1. (a) Jednotkový směr největšího růstu je vektor

$$\frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}\right).$$

   (b) Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(1,2)$ je

$$T(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot (x-1, y-2) = -(x-1) + \pi(y-2).$$

2. Hledáme bod minima funkce $f(x,y) = y$ na množině

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 2xy + 5y^2 = 1\right\}.$$

(Existence takového bodu plyne z Weierstrassovy věty.) Z věty o Lagrangeových multiplikátorech obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda(2x + 2y) &= 0, \\ 1 + \lambda(2x + 10y) &= 0, \\ x^2 + 2xy + 5y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že $\lambda = 0$ nebo $x = -y$. Možnost $\lambda = 0$ musíme vyloučit, protože vede ke sporu s druhou rovnicí. Ze vztahu $x = -y$ a třetí rovnice dostaneme $x^2 = \frac{1}{4}$. Tedy $x = \pm\frac{1}{2}$ a $y = -x = \mp\frac{1}{2}$. Odtud plyne, že bod v M, který má nejmenší druhou souřadnici, je $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

1. semestrální test (varianta B)

1. (a) Definiční obor D funkce f je vnějšek kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, tj.

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 > 1\right\}.$$

   Z rovnosti $f(x,y) = 0$ dostaneme $x^2 + y^2 = 2$. Tedy hladina funkce f výšky 0 je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, tj.

$$\operatorname{lev}(f;0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = \sqrt{2}\right\}.$$

   (b) Z řetízkového pravidla plyne, že

$$g'(3) = \nabla f(-1,1) \cdot \varphi'(3) = (-2,2) \cdot (1,3) = 4.$$

2. Gradient funkce f je nulový právě tehdy, když

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2y &= 0, \\ -2x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice máme $x = y$. Dosazením do první rovnice dostaneme

$$2x(2x^2 - 1) = 0.$$

Odtud vidíme, že $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ jsou stacionární body funkce f. Hessova matice funkce f v bodě (x,y) je

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

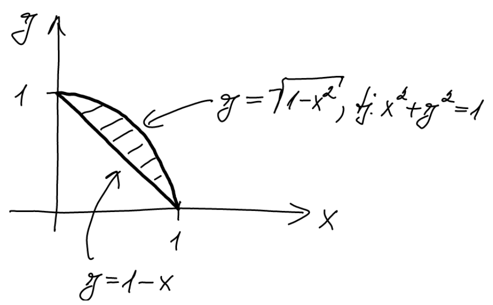
je indefinitní matice, a proto je $(0,0)$ sedlový bod funkce f. Dále

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní matice, a proto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ jsou body lokálního minima funkce f.

2. semestrální test (varianta A)

1. Dvojnásobný integrál odpovídá integrálu přes množinu znázorněnou na Obrázku 1.



Obrázek 1: Znázornění integračního oboru.

Nyní musíme popsat danou množinu pomocí polárních souřadnic. Z obrázku vidíme, že $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Horní mez polární souřadnice r je 1 nezávisle na φ. Dosadíme-li vztahy $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$ mezi kartézskými a polárními souřadnicemi do rovnice $y = 1 - x$, pak po úpravě obdržíme

$$r = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi},$$

což je vyjádření dolní meze souřadnice r v závislosti na $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Proto

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^1 \frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{r^2} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi + \sin\varphi - 1 \,\mathrm{d}\varphi = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

2. Parametrizace křivky C je například

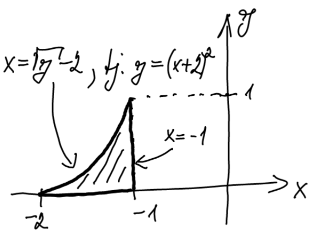
$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (2(1-t), t), \quad t \in [0,1].$$

Proto

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(2(1-t) - 2t^2\right)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. semestrální test (varianta B)

1. Dvojnásobný integrál odpovídá integrálu přes množinu načrtnutou na Obrázku 2.



Obrázek 2: Znázornění integračního oboru.

Z obrázku plyne, že

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}-2}^{-1} \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{-1} \int_0^{(x+2)^2} \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} x\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}.$$

2. Parametrizace křivky C odpovídající zadané orientaci je například

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Proto

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(x,y) \cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-4\sin t\cos t, 4\cos^2 t\right) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\ \mathrm{d}t \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = 8.\end{aligned}$$