Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku Jméno a příjmení a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r.
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r.
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2\sin\theta$.

Zadání A

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 + 2x}\cos(x + 2y).$$

Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(0, 0)$. Tento výsledek využijte k aproximaci hodnoty $f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

2. [10 bodů] Nalezněte všechny body na křivce o rovnici

$$(x + y)^2 + 4(x - y)^2 = 16,$$

které jsou nejblíže počátku.

3. [10 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x, y, z) = z^2$ přes množinu

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + y + 4z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

4. [10 bodů] Je dána plocha

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \in [-2, 2], z \geq 0\right\}.$$

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál vektorového pole

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(x - y^3 z, \sin\left(y^2\right), xy^3 + e^z\right)$$

přes křivku C, kde C je okraj plochy S orientovaný proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na něj shora.

5. [10 bodů] Ať

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

Nalezněte rozvoj funkce f do mocninné řady se středem v bodě 0 a určete poloměr konvergence této řady.

Zadání B

1. [10 bodů] Je dáno vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(x - \alpha z e^{2x}, 3y^2, z^2 - e^{2x}\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Určete všechny hodnoty parametru α, pro které je vektorové pole $\boldsymbol{F}$ potenciálové.

   (b) Pro hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ tak, aby $f(0,0,1) = 0$.

   (c) Pro hodnoty parametru α z bodu (a) vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél kružnice $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ orientované proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na ní shora.

2. [10 bodů] Jsou dány body $\boldsymbol{u} = (-2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (0,1)$ a $\boldsymbol{w} = (2,2)$.

   (a) Formulujte úlohu o proložení přímky body $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ metodou nejmenších čtverců (tj. uveďte, zda hledáte body minima nebo maxima funkce f na M a specifikujte funkci f a množinu M).

   (b) Vyřešte úlohu z bodu (a).

3. [10 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x,y) = y$ přes kompaktní množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničenou křivkami $y = x^2 + 1$ a $y = 3 - x^2$.

4. [10 bodů] Ať kompaktní množina M je částí kuželu $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ ležící mezi rovinami $z = 1$ a $z = 2$. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál vektorového pole

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(xy^2, x^2 y, e^x - \cos y\right)$$

přes plochu $S = \partial M$ orientovanou vnějším normálovým polem.

5. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(t) = -t, \quad t \in [-\pi, \pi).$$

   (a) Nalezněte Fourierovu řadu funkce f.

   (b) Určete součet Fourierovy řady funkce f na intervalu $[5\pi, 7\pi)$.

Zadání C

1. [10 bodů] Je dána funkce
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - x + 2y.$$
   (a) Nalezněte bod $\boldsymbol{a}$ náležící grafu funkce f, ve kterém je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $2x - 3y + z = 6$.
   (b) Nelezněte všechny jednotkové vektory $\boldsymbol{h}$ tak, aby $\nabla_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \mathbf{0}$.

2. [10 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce
$$f(x,y) = 4x^2 - 2x^3 - x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

3. [10 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x,y,z) = z$ přes kompaktní množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$, která je ohraničené plochami $x = 0$, $y = x^3$, $y = 8$, $z = 0$ a $z = 1$.

4. [10 bodů] Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál vektorového pole
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(-y^3 + \sin x, 3e^y + x^2\right)$$
podél kladně orientované Jordanovy křivky C, která je hranicí množiny
$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1, -y \le x \le y\right\}.$$

5. [10 bodů] Nalezněte poloměr konvergence a na intervalu konvergence součet mocninné řady
$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(x-1)^k.$$
Konverguje zadaná mocninná řada v bodě -1?

Zadání D

1. [10 bodů] Je dána funkce
$$f(x,y) = \ln(xy) + e^{x-2y+1}.$$
Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(1,1)$. Tento výsledek využijte k aproximaci hodnoty $f\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$.

2. [10 bodů] Nalezněte všechny body minima a body maxima funkce
$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x$$
na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 16\}$.

3. [10 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x,y,z) = y$ přes množinu
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, y \ge 0, z \ge 0\right\}.$$

4. [10 bodů] Pomocí Greenovy věty určete obsah množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže víte, že hranice M je Jordanova křivka s parametrizací
$$\varphi(t) = \left(t^2 - t, t^3 - t\right), \quad t \in [0,1].$$

5. [10 bodů] Je dána funkce
$$f(t) = \begin{cases} -2, & t \in [-1,1]; \\ 0, & t \in [-2,-1) \cup (1,2). \end{cases}$$
Nalezněte Fourierovu řadu funkce f a určete její součet na intervalu $[-2,2)$.

Zadání E

1. [10 bodů] Je dáno vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (g(y)\sin x, 2y - \cos x)\,,$$

kde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^1.

(a) Určete všechny možné funkce g tak, aby vektorové pole $\boldsymbol{F}$ bylo potenciálové (na $\mathbb{R}^2$).

(b) Pro funkci g z bodu (a) splňující $g(0) = 0$ nalezněte potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ tak, aby $f(0, 2) = 0$.

2. [10 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^4 + 2z^2 - y^2(2z - 1) - 2x + z.$$

3. [10 bodů] Záměnou pořadí integrace spočtěte

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. [10 bodů] Ať křivka C je průnik kružnice $x^2 + y^2 = 4$ s polorovinou $x \geq 0$.

(a) Nalezněte nějakou parametrizaci křivky C.

(b) Vypočtěte křivkový integrál funkce $f(x, y) = x^2 + y$ podél křivky C.

5. [10 bodů] Je dána mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n n}.$$

(a) Určete její poloměr konvergence a rozhodněte, zda řada konverguje v bodě -3.

(b) Na intervalu konvergence nalezněte její součet.

Stručné řešení

Zadání A

1. Snadno nalezneme, že

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\cos(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} - \sqrt{1+2x}\sin(x+2y), -2\sqrt{1+2x}\sin(x+2y) \right), \\
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} -\frac{2(1+x)\cos(x+2y)}{\sqrt{(1+2x)^3}} - \frac{2\sin(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} & -\frac{2\sin(x+2y)+2(1+2x)\cos(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} \\ -\frac{2\sin(x+2y)+2(1+2x)\cos(x+2y)}{\sqrt{1+2x}} & -4\sqrt{1+2x}\cos(x+2y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne, že Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(0,0)$ je

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + (1,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + x - x^2 - 2xy - 2y^2.
\end{aligned}
$$

Proto

$$
f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) \approx T_2\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{20}.
$$

2. Hledáme bod minima spojité funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množině

$$
M = \left\{ (x,y) \,\middle|\, (x+y)^2 + 4(x-y)^2 = 16 \right\}.
$$

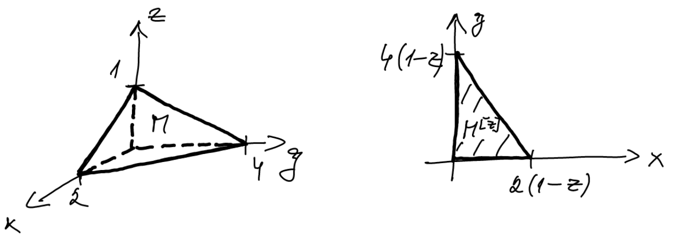
Množina M je neprázdná a kompaktní, a proto řešení existuje. Bod minima nalezneme pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Jestliže (x,y) je bod minima, potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$
\begin{aligned}
x + \lambda(5x - 3y) &= 0, && (1) \\
y + \lambda(-3x + 5y) &= 0, && (2) \\
(x+y)^2 + 4(x-y)^2 &= 16. && (3)
\end{aligned}
$$

Odečtením (2) od (1) dostaneme $(x-y)(1+8\lambda) = 0$. Proto $x = y$ nebo $\lambda = -\frac{1}{8}$.

- Je-li $x = y$, pak z (3) plyne, že $4x^2 = 16$, a proto $x = \pm 2$.
- Je-li $\lambda = -\frac{1}{8}$, pak díky (1) je $x = -y$. Dosazením do (3) obdržíme $x^2 = 1$, a tedy $x = \pm 1$.

Body minima tedy musíme hledat mezi body $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(2,2)$ a $(-2,-2)$. Protože $f(1,-1) = f(-1,1) = 2$ a $f(2,2) = f(-2,-2) = 8$, jsou body $(1,-1)$ a $(-1,1)$ hledané body minima.



Obrázek 1: Znázornění množiny M a jejího „řezu“ $M^{[z]}$.

3. Pro každé $z \in [0,1]$ označme

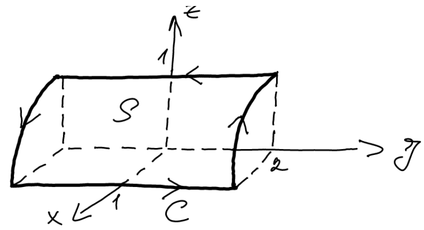
$$M^{[z]} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 2(1-z), 0 \le y \le 4 - 2x - 4z\right\}.$$

   Množiny M a $M^{[z]}$ jsou načrtnuty na Obrázku 1. Z Fubiniho věty plyne, že

$$\int_M z^2 \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) = \int_0^1 \int_{M^{[z]}} z^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2(1-z)} \int_0^{4-2x-4z} z^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 z^2 \int_0^{2(1-z)} 4 - 2x - 4z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 4\int_0^1 z^2(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{2}{15}.$$

4. Plocha S je načrtnuta na Obrázku 2. Za parametrizaci plochy S volme například vektorovou funkci

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = (\sin u, v, \cos u), \quad (u,v) \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \times [-2,2].$$



Obrázek 2: Plocha S spolu s jejím okrajem C.

Potom

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} = (\sin u, 0, \cos u).$$

Odtud vidíme, že orientace plochy S indukovaná parametrizací $\boldsymbol{\Phi}$ je souhlasná se zadanou orientací okraje C. Podle Stokesovy věty máme

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$
$$= \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3v^2 \sin u, -2v^3, 3v^2 \cos u) \cdot (\sin u, 0, \cos u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8\pi.$$

5. Rozklad funkce f na parciální zlomky dává

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}.$$

Protože

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, \quad \text{pro } |x| < 1,$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}, \quad \text{pro } |x| < 2,$$

je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left[(-1)^{k+1} - \frac{1}{2^{k+1}}\right] x^k$$

pro $|x| < 1$ (tj. poloměr konvergence je $R = 1$).

Zadání B

1. (a) Snadno nalezneme, že $\nabla \times \boldsymbol{F}(x, y, z) = (0, (2 - \alpha)e^{2x}, 0)$. Tedy $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ na $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když $\alpha = 2$.

   (b) Potenciál f musí splňovat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x - 2ze^{2x}, \tag{4}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2, \tag{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = z^2 - e^{2x}. \tag{6}$$

   Integrací rovnice (4) dostaneme

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - ze^{2x} + g(y, z)$$

   kde $g(y, z)$ je zatím neznámá funkce dvou proměnných. Dosazením do (5) máme

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 3y^2,$$

   a proto $g(y, z) = y^3 + h(z)$. Máme tak

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - ze^{2x} + y^3 + h(z)$$

   K určení neznámé funkce h využijeme rovnici (6). Dosazením obdržíme rovnici $h'(z) = z^2$. Proto $h(z) = \frac{z^3}{3} + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Z podmínky $f(0, 0, 1) = 0$ plyne, že $C = \frac{2}{3}$. Tedy

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - ze^{2x} + y^3 + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

   (c) Protože pro $\alpha = 2$ je $\boldsymbol{F}$ potenciálové na $\mathbb{R}^3$ a C je uzavřená křivka, je

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

2. (a) Hledáme bod minima funkce

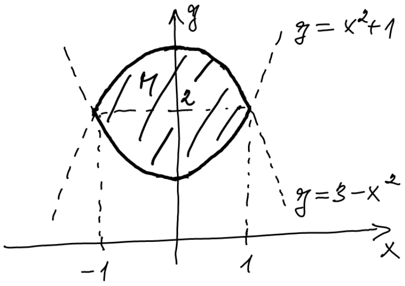
$$f(k, q) = (-2k + q + 1)^2 + (q - 1)^2 + (2k + q - 2)^2$$

   na množině $M = \mathbb{R}^2$.

   (b) Protože f je konvexní, je každý stacionární bod funkce f bodem minima. Z podmínky $\nabla f = \boldsymbol{0}$ máme

$$4k - 3 = 0,$$
$$3q - 2 = 0.$$

   Tedy $k = \frac{3}{4}$ a $q = \frac{2}{3}$. Hledaná přímka je tak určena rovnicí $y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$.



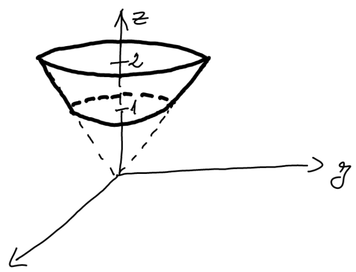
Obrázek 3: Množina M.

3. Množina M je znázorněna na Obrázku 3. Využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\int_M y \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{3-x^2} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (3-x^2)^2 - (x^2+1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}.$$

4. Množina M je znázorněna na Obrázku 4. Protože $\nabla \cdot \boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2 + y^2$, plyne z Gaussovy věty, že

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \int_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z r^3 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{31\pi}{10}.$$



Obrázek 4: Množina M.

5. (a) Fourierovy koeficienty funkce f jsou

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -t\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}_0,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -t\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -t\sin(kt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(kt)}{k}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{2(-1)^k}{k}, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Fourierova řada funkce f proto je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{k}\sin(kt).$$

(b) Součet $\mathscr{F}_f(t)$ Fourierovy řady funkce f na intervalu $[5\pi, 7\pi)$ je

$$\mathscr{F}_f(t) = \mathscr{F}_f(t - 6\pi) = \begin{cases} 6\pi - t, & \text{pro } t \in (5\pi, 7\pi), \\ 0, & \text{pro } t = 5\pi. \end{cases}$$

Zadání C

1. (a) Protože $\nabla f(x,y) = (2x+2y-1, 2x+6y+2)$, má tečná rovina v bodě $(x,y,f(x,y))$ normálový vektor

$$\boldsymbol{v} = (2x+2y-1, 2x+6y+2, -1)\,.$$

Normálový vektor roviny o rovnici $2x-3y+z=6$ je

$$\boldsymbol{w} = (2,-3,1).$$

Aby tečná rovina byla rovnoběžná se zadanou rovinou, musí existovat reálné číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{w}$. Odtud plyne, že $\lambda = -1$ a navíc

$$\begin{aligned} 2x+2y &= -1,\\ 2x+6y &= 1. \end{aligned}$$

Tedy $x=-1$ a $y=\frac{1}{2}$. Protože $f\left(-1,\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$, je

$$\boldsymbol{a} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right).$$

(b) Z nulovosti směrové derivace plyne, že

$$0 = \boldsymbol{h} \cdot (-1,2) = -h_1 + 2h_2.$$

Tedy $h_1 = 2h_2$. Protože $\boldsymbol{h}$ je jednotkový vektor, musí platit

$$1 = \|\boldsymbol{h}\|^2 = h_1^2 + h_2^2 = 5h_2^2.$$

To znamená, že $h_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Proto

$$\boldsymbol{h} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,1)\,.$$

2. Podmínka stacionarity (nulovost gradientu) vede na soustavu rovnic

$$8x - 6x^2 - 2xy = 0, \tag{7}$$
$$-x^2 + y = 0. \tag{8}$$

Zřejmě (8) právě tehdy, když $y = x^2$. Dosazením do (7) obdržíme

$$0 = -2x(x^2+3x-4) = -2x(x-1)(x+4).$$

Stacionární body proto jsou $(0,0)$, $(1,1)$ a $(-4,16)$. Hessova matice funkce f v bodě (x,y) je

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x-2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

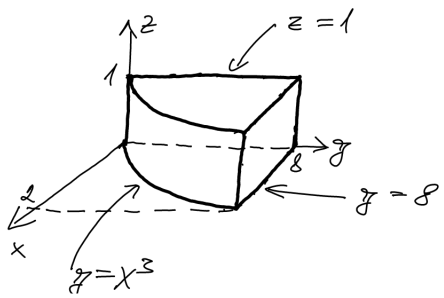
je pozitivně definitní ($H_f(0,0)$ má evidentně kladná vlastní čísla), je $(0,0)$ bod lokálního minima. Matice

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H_f(-4,16) = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou indefinitní (jejich determinant je totiž záporný), a tedy $(1,1)$ a $(-4,16)$ jsou sedlové body funkce f.

3. Množina M je znázorněna na Obrázku 5. Podle Fubiniho věty je

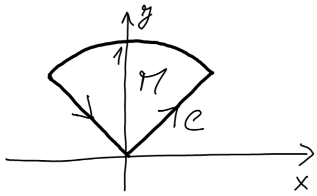
$$\int_M z \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^2 \int_{x^3}^8 z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^2 z(8-x^3) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z = 12 \int_0^1 z \,\mathrm{d}z = 6.$$



Obrázek 5: Množina M.

4. Množina M a křivka C jsou načrtnuty na Obrázku 6. Z Greenovy věty plyne, že

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_M \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_M 2x + 3y^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \left(2r\cos\varphi + 3r^2 \sin^2\varphi\right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1 - \cos(2\varphi) \,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{16}(\pi + 2)\,.
\end{aligned}$$



Obrázek 6: Množina M a křivka C.

5. Snadno nalezneme, že

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(x-1)^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(x-1)^{k+1}\right)' = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}$$

pro $|x-1| < 1$ (tj. poloměr konvergence je $R = 1$). Interval konvergence je $(0,2)$, a proto řada diverguje v bodě -1.

Zadání D

1. Snadno nalezneme, že

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x} + e^{x-2y+1}, \frac{1}{y} - 2e^{x-2y+1}\right),$$
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} + e^{x-2y+1} & -2e^{x-2y+1} \\ -2e^{x-2y+1} & -\frac{1}{y^2} + 4e^{x-2y+1} \end{pmatrix}.$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(1,1)$ je proto

$$T_2(x,y) = f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) + \frac{1}{2}(x-1, y-1) H_f(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$
$$= 1 + 2(x-1) - (y-1) - 2(x-1)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2.$$

Odtud

$$f\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right) \approx T_2(x,y) = \frac{144}{200}.$$

2. Z Weierstrassovy věty víme, že existují body minima a body maxima funkce f na M. Pokud takové body leží v $\operatorname{int}(M)$, pak jsou to nutně stacionární body funkce f. Protože $\nabla f(x,y) = (4x-4, 6y)$, je $\nabla f(x,y) = (0,0)$ právě tehdy, když $x = 1$ a $y = 0$. Zřejmě $(1,0) \in \operatorname{int}(M)$, a proto $(1,0)$ je podezřelý bod z extrému.

Jestliže $(x,y) \in \partial M$ je bod extrému funkce f na M, pak nutně existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$2x - 2 + \lambda x = 0, \tag{9}$$
$$3y + \lambda y = 0, \tag{10}$$
$$x^2 + y^2 = 0. \tag{11}$$

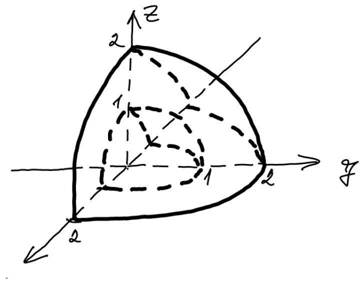
Zřejmě (10) platí právě tehdy, když $\lambda = -3$ nebo $y = 0$.

- Je-li $\lambda = -3$, pak z (9) plyne, že $x = -2$. Díky (11) je potom $y = \pm\sqrt{12}$.
- Je-li $y = 0$, pak z (11) máme $x = \pm 4$.

Podezřelé body z extrému ležící v ∂M jsou $(-2, \sqrt{12})$, $(-2, -\sqrt{12})$, $(-4, 0)$ a $(4, 0)$. Protože $f(1,0) = -2$, $f(-2, \sqrt{12}) = f(-2, -\sqrt{12}) = 52$, $f(4,0) = 16$ a $f(-4,0) = 48$, jsou $(-2, \sqrt{12})$ a $(-2, -\sqrt{12})$ body maxima funkce f na M a $(1,0)$ je bod minima funkce f na M.

3. Množina M je znázorněna na Obrázku 7. Přechodem ke sférickým souřadnicím obdržíme

$$\int_M y \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_1^2 r^3 \sin\varphi \sin^2\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta = 2\left(4 - \frac{1}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \left(4 - \frac{1}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2\theta) \,\mathrm{d}\theta = \frac{15\pi}{8}.$$



Obrázek 7: Množina M.

4. Využijeme-li Greenovu větu s vektorovým polem $\boldsymbol{F}(x, y) = (0, x)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\text{obsah}(M) &= \int_M 1 \, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \int_M \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{\partial M} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 (0, t^2 - t) \cdot (2t - 1, 3t^2 - 1) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

5. Fourierovy koeficienty funkce f jsou

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \, \mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} -\frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}, & \text{pro } k \in \mathbb{N}, \\ -2, & \text{pro } k = 0, \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \, \mathrm{d}t = 0, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Fourierova řada funkce f proto je

$$-1 + \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right).$$

Součet $\mathscr{F}_f(t)$ Fourierovy řady funkce f na intervalu $[-2, 2)$ je

$$\mathscr{F}_f(t) = \begin{cases} -2, & \text{pro } t \in (-1, 1), \\ -1, & \text{pro } t \in \{-1, 1\}, \\ 0, & \text{pro } t \in [-2, -1) \cup (1, 2). \end{cases}$$

Zadání E

1. (a) Protože $\mathbb{R}^2$ je konvexní množina, je $\boldsymbol{F}$ potenciálové právě tehdy, když $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ na $\mathbb{R}^2$. Z uvedené rovnosti mezi parciálními derivacemi plyne, že $g'(y) \sin x = \sin x$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Tedy $g'(y) = 1$. Odtud $g(y) = y + K$, kde $K \in \mathbb{R}$.

   (b) Z bodu (a) a podmínky $g(0) = 0$ plyne, že hledáme potenciál f k vektorovému poli
$$\boldsymbol{F}(x, y) = (y \sin x, 2y - \cos x).$$
   Podle definice potenciálu musí platit
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin x, \tag{12}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \cos x. \tag{13}$$
   Integrací rovnice (12) obdržíme $f(x, y) = -y \cos x + h(y)$, kde h je zatím neurčená funkce. Dosazením do (13) máme $h'(y) = 2y$. Tedy $h(y) = y^2 + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. To znamená, že $f(x, y) = -y \cos x + y^2 + C$. Z podmínky $f(0, 2) = 0$ plyne, že $C = -2$. Hledaný potenciál proto je
$$f(x, y) = -y \cos x + y^2 - 2.$$

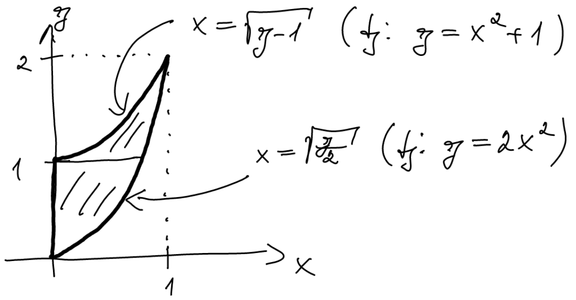
2. Z podmínky nulovosti gradientu obdržíme soustavu rovnic
$$x - 1 = 0, \tag{14}$$
$$y(y^2 - 4z + 2) = 0, \tag{15}$$
$$4z - 2y^2 + 1 = 0. \tag{16}$$
   Z (14) okamžitě obdržíme $x = 1$. Dále vidíme, že platí (15) právě tehdy, když $y = 0$ nebo $y^2 = 4z - 2$.

   - Je-li $y = 0$, pak z (16) máme $z = -\frac{1}{4}$.
   - Je-li $y^2 = 4z - 2$, pak z (16) plyne, že $-4z + 5 = 0$. Tedy $z = \frac{5}{4}$ a $y = \pm\sqrt{3}$.

   Máme tak tři stacionární body, a to konkrétně $\left(1, 0, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \sqrt{3}, \frac{5}{4}\right)$ a $\left(1, -\sqrt{3}, \frac{5}{4}\right)$. Zbývá určit jejich typ. Hessova matice funkce f v bodě (x, y, z) je
$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 2(2z - 1) & -4y \\ 0 & -4y & 4 \end{pmatrix}.$$
   Protože
$$H_f\left(1, 0, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
   je pozitivně definitní (má evidentně kladná vlastní čísla), je $\left(1, 0, -\frac{1}{4}\right)$ bod lokálního minima. Ze Sylvesterova kritéria snadno ukážeme, že
$$H_f\left(1, \sqrt{3}, \frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4\sqrt{3} \\ 0 & -4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}, \quad H_f\left(1, -\sqrt{3}, \frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$
   jsou indefinitní matice, a proto $\left(1, \sqrt{3}, \frac{5}{4}\right)$ a $\left(1, -\sqrt{3}, \frac{5}{4}\right)$ jsou sedlové body.

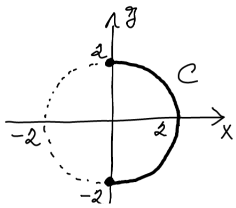
3. Uvažovaný součet dvou dvojnásobných integrálů reprezentuje integrál funkce e^{-x^3+3x} přes množinu M, která je znázorněná na Obrázku 8. Podle Fubiniho věty máme

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} e^{-x^3+3x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{2x^2}^{x^2+1} e^{-x^3+3x} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 (1-x^2)e^{-x^3+3x} \,\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{3}.$$



Obrázek 8: Množina M.

4. Křivka C je načrtnuta na Obrázku 9.



Obrázek 9: Křivka C.

(a) Parametrizace křivky C je například

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (2\cos t, 2\sin t)\,, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(b) Využitím parametrizace z bodu (a) máme

$$\int_C x^2 + y \,\mathrm{d}s = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 t + \sin t)\,\mathrm{d}t = 4\pi.$$

5. (a) Protože

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(x-1)^k}{3^k k}\right|} = \frac{|x-1|}{3},$$

plyne z odmocninového kritéria, že poloměr konvergence je $R = 3$. V bodě -3 uvedená řada diverguje, neboť $|-3-1| = 4 > 3$.

(b) Protože

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{3^k k}\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{3^k} = \frac{1}{4-x}$$

pro $x \in (-2, 4)$, je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{3^k k} = \int \frac{1}{4-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(4-x) + C$$

pro $x \in (-2, 4)$. Dosadíme-li do poslední rovnosti za x hodnotu 1, dostaneme $0 = C - \ln 3$. Tedy

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{3^k k} = -\ln(4-x) + \ln 3$$

pro $x \in (-2, 4)$.