Matematická analýza 2

Plošný integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Regulární plocha

Definice (funkce třídy C^1 na uzavřené množině)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$ uzávěr neprázdné otevřené množiny. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^1, jestliže existuje funkce $\boldsymbol{\Psi} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je nějaká otevřená množina obsahující D, třídy C^1 tak, že $\boldsymbol{\Psi}\restriction_D = \boldsymbol{\Phi}$. Pro každé $\boldsymbol{a} \in \partial D$ a pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ v takovém případě definujeme

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) := \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

- Lze ukázat, že definice $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x_i}$ v hraničních bodech množiny D nezávisí na konkrétní volbě funkce $\boldsymbol{\Psi}$.

Regulární plocha

Definice (regulární plocha)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je sjednocením Jordanovy křivky a jejího vnitřku. Množina $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá regulární plocha, jestliže existuje spojitá vektorová funkce $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ splňující

1. $\mathbf{\Phi}(D) = S$;
2. $\mathbf{\Phi}$ je třídy C^1;
3. $\mathbf{\Phi}$ je prostá na $\operatorname{int}(D)$;
4. pro každé $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int}(D)$ má Jacobiho matice $\boldsymbol{J}_{\mathbf{\Phi}}(\boldsymbol{x})$ hodnost 2.

Zobrazení $\mathbf{\Phi}$ se nazývá parametrizace regulární plochy S.

Pro každé $(u, v) \in \operatorname{int}(D)$ zavádíme následující terminologii:

- $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}(u, v)$ ... tečné vektory k S v bodě $\mathbf{\Phi}(u, v)$.
- $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}(u, v)$ ... normálový vektor k S v bodě $\mathbf{\Phi}(u, v)$.

Regulární plocha

Příklad

1. Ať $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je sjednocení Jordanovy křivky a jejího vnitřku, je třídy C^1. Pak
   - $(u, v) \in D \mapsto (f(u, v), u, v)$,
   - $(u, v) \in D \mapsto (u, f(u, v), v)$,
   - $(u, v) \in D \mapsto (u, v, f(u, v))$.

   jsou parametrizace regulárních ploch.
   Tedy například $S = \left\{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ je regulární plocha.
2. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + z^2 = 1, y \in [0, 5]\right\}$ je regulární plocha. Jedna z jejích parametrizací je
   $$\mathbf{\Phi}(u, v) = (\cos u, v, \sin u), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 5].$$
3. $S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|x\| = 1\right\}$ je regulární plocha. Jedna z jejích parametrizací je
   $$\mathbf{\Phi}(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Plošný integrál reálné funkce přes regulární plochu

Definice

Nechť S je regulární plocha s parametrizací $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ a f je spojitá reálná funkce definovaná na S. Potom plošný integrál funkce f přes regulární plochu S definujeme předpisem

$$\int_S f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma := \int_D f(\mathbf{\Phi}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}\lambda_2(u,v).$$

Obsah regulární plochy S je číslo

$$\mathrm{obsah}(S) := \int_S 1\,\mathrm{d}\sigma.$$

- Lze ukázat, že definice reálné funkce přes regulární plochu S nezávisí na zvolené parametrizaci plochy S.

Plošný integrál reálné funkce přes regulární plochu

Příklad

Je dána plocha $S = \left\{ \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$. Potom

$$\operatorname{obsah}(S) = \int_S 1 \, \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\pi.$$

Příklad

Nechť S je horní polosféra se středem v počátku a poloměrem 1. Potom

$$\int_S x^2 + y^2 \, \mathrm{d}\sigma = \frac{4\pi}{3}.$$

Plocha

Ať S je regulární plocha.

- Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in S$ je bod okraje regulární plochy S, jestliže není „obklopen ze všech stran“ body z S.
- Množina všech bodů okraje regulární plochy S se nazývá okraj regulární plochy S a značí se $O(S)$.
- Jestliže $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace S, pak $O(S) \subseteq \boldsymbol{\Phi}(\partial D)$.

Příklad

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\}$, pak $O(S) = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 2\}$.
2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, pak $O(S) = \emptyset$.

Plocha

Definice (plocha)

Množina S se nazve plocha, jestliže existuje konečná posloupnost $(S_i)_{i=1}^m$ regulárních ploch takových, že

1. $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$;
2. jestliže $i \neq j$, pak $S_i \cap S_j = O(S_i) \cap O(S_j)$ je buď prázdná množina, nebo oblouk;
3. jestliže $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ jsou tři navzájem různé indexy, pak $S_i \cap S_j \cap S_k$ je konečná množina.

Posloupnost $(S_i)_{i=1}^m$ se nazývá rozklad plochy S. Okraj plochy S je uzávěr množiny všech bodů $\boldsymbol{x} \in S$, pro které existuje index i tak, že $\boldsymbol{x} \in O(S_i)$ a $\boldsymbol{x} \notin O(S_j)$ kdykoli $j \neq i$. Řekneme, že plocha S je uzavřená, jestliže $O(S) = \emptyset$.

Příklad

Hranice krychle $[0, 1]^3$ je uzavřená plocha.

Plošný integrál reálné funkce

Definice (plošný integrál reálné funkce)

Ať S je plocha, $(S_i)_{i=1}^m$ je rozklad plochy S na regulární plochy a f je reálná funkce spojitá na S. Potom plošný integrál funkce f přes plochu S definujeme předpisem

$$\int_S f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma := \sum_{i=1}^m \int_{S_i} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma.$$

Obsah plochy S je číslo

$$\mathrm{obsah}(S) := \int_S 1\,\mathrm{d}\sigma.$$

- Lze ukázat, že integrál nezávisí na volbě rozkladu plochy S.
- Alternativní značení plošného integrálu: $\int_S f$.

Plošný integrál reálné funkce

Příklad

Mějme plochu S zadanou rozkladem (S_1, S_2), kde

- S_1 je horní polosféra se středem v počátku a poloměrem 1;
- S_2 je kruh v rovině $z = 0$ se středem v počátku a poloměrem 1.

Potom

$$\int_S x^2 + y^2 \, \mathrm{d}\sigma = \frac{11\pi}{6}.$$

Orientovaná regulární plocha

- Idea orientace: pomocí spojitého vektorového pole jednotkových normálových vektorů vybereme jednu stranu plochy.

Definice (orientovaná regulární plocha)

Ať S je regulární plocha. Spojité vektorové pole $\boldsymbol{N} : S \to \mathbb{R}^3$ se nazve jednotkové normálové pole regulární plochy S, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in S \setminus O(S)$ je $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$ jednotkový normálový vektor k S v bodě $\boldsymbol{x}$. Každé jednotkové normálové pole $\boldsymbol{N}$ regulární plochy S se nazývá orientace regulární plochy S a dvojice $(S, \boldsymbol{N})$ se nazývá orientovaná regulární plocha.

- Některé regulární plochy nelze orientovat (tj. neexistuje pro ně jednotkové normálové pole). Příkladem takové plochy je Möbiova páska.
- Nemůže-li dojít k nedorozumění, pak orientovanou regulární plochu $(S, \boldsymbol{N})$ značíme jen symbolem S.

Orientovaná regulární plocha

Příklad

1. Nechť $R > 0$ a
$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}.$$
Potom
$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{x} \in S,$$
je jednotkové normálové pole sféry S.
2. Je dána regulární plocha S parametrizací $\boldsymbol{\Phi}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $(u, v) \in D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0 \right\}$. Potom
$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{x} \in S,$$
je jednotkové normálové pole regulární plochy S.

Orientovaná plocha

- Pokud máme plochu slepenou z více regulárních ploch, pak musí být jednoduché plochy orientovány „konzistentně“.
- Ať $(S, \boldsymbol{N})$ je orientovaná regulární plocha a $(C, \boldsymbol{\tau})$ je orientovaná křivka, kde $C \subseteq O(S)$. Řekneme, že orientace $\boldsymbol{\tau}$ je souhlasná s $\boldsymbol{N}$, jestliže při pohybu po křivce C ve směru orientace $\boldsymbol{\tau}$ s hlavou ve směru $\boldsymbol{N}$ máme plochu S po levé ruce.

Definice (orientovaná plocha)

Řekneme, že $(S, \boldsymbol{N})$ je orientovaná plocha, jestliže platí:

1. S je plocha s rozkladem $(S_i)_{i=1}^k$;
2. $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{N}_i)_{i=1}^k$, kde $\boldsymbol{N}_i$ je jednotkové normálové pole regulární plochy S_i pro každé $i \in \{1, \dots k\}$;
3. kdykoli $i \neq j$, $C = O(S_i) \cap O(S_j)$ je oblouk, $\boldsymbol{\tau}_i$ je orientace C souhlasná s $\boldsymbol{N}_i$ a $\boldsymbol{\tau}_j$ je orientace C souhlasná s $\boldsymbol{N}_j$, pak $\boldsymbol{\tau}_i = -\boldsymbol{\tau}_j$.

Plošný integrál vektorového pole

Definice (plošný integrál vektorového pole)

Je-li $(S, \boldsymbol{N})$ orientovaná plocha, $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{N}_i)_{i=1}^k$ a $\boldsymbol{F}$ spojité vektorové pole na S, potom plošný integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu $(S, \boldsymbol{N})$ definujeme předpisem

$$\int_{(S,\boldsymbol{N})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} := \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_i \, \mathrm{d}\sigma.$$

- Místo $\int_{(S,\boldsymbol{N})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ píšeme také $\int_{(S,\boldsymbol{N})} \boldsymbol{F}$. Nemůže-li dojít k nedorozumění, pak píšeme jen $\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ nebo $\int_S \boldsymbol{F}$.
- $\int_{(S,\boldsymbol{N})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ interpretujeme jako tok vektorového pole $\boldsymbol{F}$ orientovanou plochou $(S, \boldsymbol{N})$.

Plošný integrál vektorového pole

Jestliže $(S, \boldsymbol{N})$ je orientovaná regulární plocha a $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace S splňující

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u,v) \right\|}$$

pro skoro všechna $(u,v) \in D$, potom

$$\int_{(S,\boldsymbol{N})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u,v) \right] \mathrm{d}\lambda_2(u,v)$$

Příklad

Ať $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \right\}$ je plocha orientovaná jednotkovým normálovým polem, které má v bodě $(0,0,1)$ třetí komponentu kladnou. Jestliže $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$, pak

$$\int_S \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\pi}{3}.$$

Plošný integrál vektorového pole

- Ať $(S, \boldsymbol{N})$, kde $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{N}_i)_{i=1}^k$, je orientovaná plocha taková, že S hranicí oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Řekneme, že $(S, \boldsymbol{N})$ je orientovaná vnějším normálovým polem, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ a každé $\boldsymbol{x} \in S_i \setminus O(S_i)$ je $\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{x})$ vektor směřující ven z Ω.

Příklad

Ať $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, 0, 1)$ a S je hranice množiny $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]\right\}$ orientovaná vnějším normálovým polem. Potom

$$\int_S \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 2\pi.$$

Gaussova věta

- Divergence vektorového pole $\boldsymbol{F}$ je funkce

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

- Místo $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ se často píše $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$.

Věta (Gaussova věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je omezená oblast, jejíž hranice je uzavřená plocha S orientovaná vnějším normálovým polem. Jestliže $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ je vektorové pole třídy C^1, potom

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\lambda_3(\boldsymbol{x}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Protože $\lambda_3(S) = 0$, je také $\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\overline{\Omega}} \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\lambda_3(\boldsymbol{x})$.

Gaussova věta

Příklad

Ať $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2x - e^{y-z}, xy + z^2, xz^3 + \sin y\right)$ a S je hranice množiny $M = [0,1]^3$ orientovaná vnějším normálovým polem. Potom

$$\int_S \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 3.$$

- Ať $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{F}$ je vektorové pole třídy C^1 na nějakém $U(\boldsymbol{p})$ a $B(\boldsymbol{p};r)$ je koule se středem v bodě $\boldsymbol{p}$ a poloměrem r. Jestliže $S(\boldsymbol{p};r)$ je hranice koule $B(\boldsymbol{p};r)$ orientovaná vnějším normálovým polem, potom

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = \lim_{r \to 0+} \frac{\int_{S(\boldsymbol{p};r)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\lambda_3\left(B(\boldsymbol{p};r)\right)}.$$

Stokesova věta

- Připomeňme, že rotace vektorového pole $\boldsymbol{F}$ je vektorové pole

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

- Místo $\nabla \times \boldsymbol{F}$ se často píše $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$.

Věta (Stokesova věta)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast, $S \subseteq \Omega$ je plocha s okrajem C, kde C je křivka, a $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je vektorové pole třídy C^1. Jestliže křivka C a plocha S jsou souhlasně orientované, potom

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Stokesova věta

Příklad

Ať C je okraj čtverce s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,0)$, který je orientován proti směru hodinových ručiček při pohledu shora. Jestliže $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (e^x + y, e^y - x, \sin z)$, potom

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -2.$$

Příklad

Mějme polosféru $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\right\}$ orientovanou jednotkovým normálovým polem s třetí komponentou nezápornou. Jestliže $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x, x + yz, \operatorname{arctg}(xyz))$, potom

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 4\pi.$$

Stokesova věta

- Jsou dány bod $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ a rovina ϱ procházející bodem $\boldsymbol{a}$. Ať $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor roviny ϱ a $K(\boldsymbol{a}; r) \subseteq \varrho$ je kruh se středem $\boldsymbol{a}$ a poloměrem $r > 0$ orientovaný jednotkovým normálovým polem $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}$. Položme $C(\boldsymbol{a}; r) = \partial K(\boldsymbol{a}; r)$. Jestliže $C(\boldsymbol{a}; r)$ je orientovaná souhlasně s $K(\boldsymbol{a}; r)$, potom

$$\boldsymbol{n} \cdot [\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})] = \lim_{r \to 0+} \frac{\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{obsah}\,(K(\boldsymbol{a}; r))}.$$