Matematická analýza 2

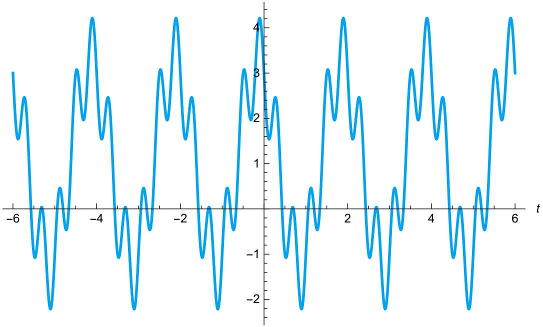
Fourierovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace

- Ať $\omega > 0$ je pevně dáno. Mnoho periodických funkcí je lineární kombinací funkcí funkcí $\sin(k\omega t)$ a $\cos(k\omega t)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Například graf



odpovídá funkci

$$f(t) = 1 - \sin(\pi t) + 2\cos(\pi t) - \sin(5\pi t).$$

Motivace

- Například

$$f(t) = |\sin t|$$

  ale nelze vyjádřit jako lineární kombinace funkcí $\sin(k\omega t)$ a $\cos(k\omega t)$.
- Co když uvážíme „nekonečnou lineární kombinaci“ funkcí $\sin(k\omega t)$ a $\cos(k\omega t)$?
- Počátky Fourierových řad (18. století a začátek 19. století): problémy vedení tepla a vlnění.
- Aplikace: diferenciální rovnice, fyzika, teorie signálů, komprese dat,...

Periodické funkce

Definice (periodická funkce)

Ať $T > 0$. Funkce $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazve periodická s periodou T, jestliže pro každé $x \in D$ je $f(x + T) = f(x)$.

- Nejmenší perioda (pokud existuje) periodické funkce f se nazývá základní perioda.
- Je-li $T > 0$ základní perioda funkce f, pak $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se nazývá kruhová frekvence.

Definice (periodické rozšíření)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f : [a, a + T) \to \mathbb{R}$. Periodickým rozšířením funkce f budeme rozumět funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $g(t) = f(t)$ pro každé $t \in [a, a + T)$ a $g(t + T) = g(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

- Periodické rozšíření je periodická funkce s periodou T.
- Každá periodická funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodickým rozšířením nějaké vhodné funkce.

Periodická funkce

Příklad

Periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0) \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1) \end{cases}$$

je

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k-1, 2k) \\ 1 & \text{pro } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k, 2k+1). \end{cases}$$

Trigonometrická řada

Definice (trigonometrická řada)

Nechť $T > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ a $b_k \in \mathbb{R}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

se nazývá trigonometrická řada.

- Částečné součty trigonometrické řady se nazývají trigonometrické polynomy.
- Konverguje-li trigonometrická řada v nějakém bodě $t \in \mathbb{R}$, pak také konverguje v každém bodě $t + lT$, kde $l \in \mathbb{Z}$.
- Konverguje-li trigonometrická řada v nějakém bodě, pak její součet je periodická funkce s periodou T.

Ortogonalita

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$.

$$L^2([a,b)) = \left\{ f : [a,b) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Tvrzení (relace ortogonality)

Nechť $k, l \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ *a* $T > 0$. *Potom*

$$\int_a^{a+T} \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi l t}{T}\right) \, \mathrm{d}t = 0,$$

$$\int_a^{a+T} \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi l t}{T}\right) \, \mathrm{d}t = \int_a^{a+T} \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi l t}{T}\right) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \textit{pro } k = l, \\ 0, & \textit{pro } k \neq l. \end{cases}$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Ortogonalita

Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

konverguje stejnoměrně k periodickému rozšíření funkce $f \in L^2([a, a+T))$.

- Jak najít koeficienty a_k a b_k?
- Využitím relací ortogonality obdržíme

$$a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \, \mathrm{d}t,$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \, \mathrm{d}t.$$

Fourierova řada

Definice (Fourierova řada)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f \in L^2([a, a+T))$. Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N},$$

se nazývá Fourierova řada funkce f a koeficienty a_k a b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Fourierova řada

- Definice Fourierovy řady lze zobecnit na integrovatelné funkce na intervalu $[a, a+T)$.
- Konverguje-li Fourierova řada funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$, označíme její součet symbolem $\mathscr{F}_f(t)$.

Příklad

Je dána funkce

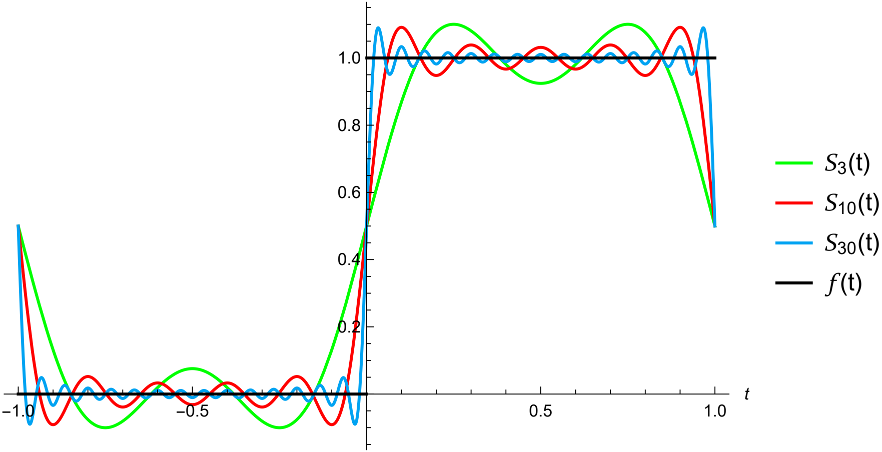
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0), \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1). \end{cases}$$

Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k} \sin(\pi k t).$$

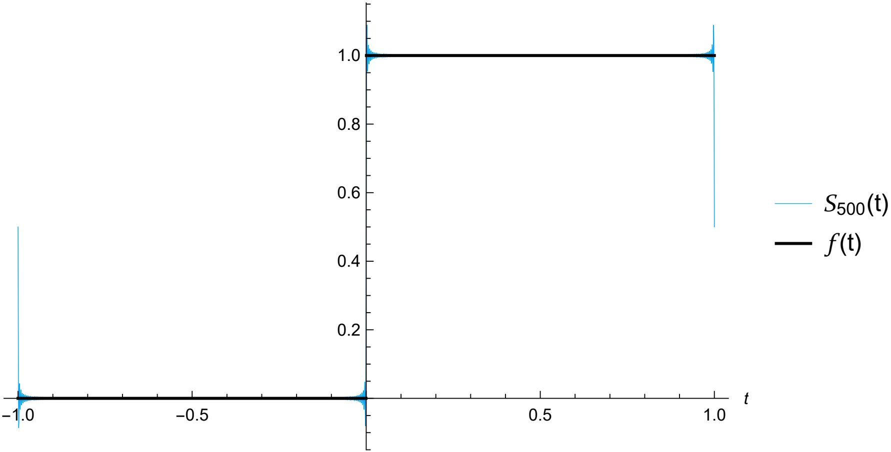
Příklad (Pokračování)

Označme $S_l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{l} \frac{1-(-1)^k}{\pi k} \sin(\pi k t)$.



Fourierova řada

Příklad (Pokračování)



Velikost „překmitů“ částečných součtů S_l blízko bodů, ve kterých není f spojitá, se nezmenšuje s rostoucím l. Tomuto jevu se říká Gibbsův jev.

Bodová konvergence

Definice

Ať $-\infty < a < b < +\infty$. Řekneme, že funkce $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá na $[a, b)$, jestliže existuje konečně mnoho bodů $t_0, \dots, t_n$ tak, že

1. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$;
2. pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ je f spojitá na (t_{k-1}, t_k);
3. $f(t_k+) = \lim_{t \to t_k+} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$;
4. $f(t_k-) = \lim_{t \to t_k-} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

- Podle uvedené definice nemusí být po částech spojitá funkce definována v bodech $t_0, \dots, t_n$.

Bodová konvergence

Věta (Dirichletova věta)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *a* $f : [a, a+T) \to \mathbb{R}$. *Předpokládejme, že* f *a* f' *jsou po částech spojité funkce na* $[a, a+T)$. *Pak Fourierova řada funkce* f *konverguje v každém bodě intervalu* $[a, a+T)$ *a její součet je*

1. $\mathscr{F}_f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t+) + f(t-)\right]$ *pro každé* $t \in (a, a+T)$;
2. $\mathscr{F}_f(a) = \frac{1}{2}\left[f(a+) + f((a+T)-)\right]$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Jsou-li splněny předpoklady Dirichletovy věty a f je spojitá na $[a, a+T)$, pak $f(t) = \mathscr{F}_f(t)$ pro každé $t \in [a, a+T)$. V tomto případě je tak $\mathscr{F}_f(t)$ periodickým rozšířením funkce $f(t)$.

Bodová konvergence

Příklad

Již víme, že Fourierova řada funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0) \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1). \end{cases}$$

je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k} \sin(\pi k t)\,.$$

Podle Dirichletovy věty konverguje tato řada pro každé $t \in [-1, 1)$ (a tedy pro každé $t \in \mathbb{R}$) a platí, že

$$\mathscr{F}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro každé } t \in (-1, 0), \\ 1 & \text{pro každé } t \in (0, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{pro každé } t \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

Příklady

Příklad

Je dána funkce

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi).$$

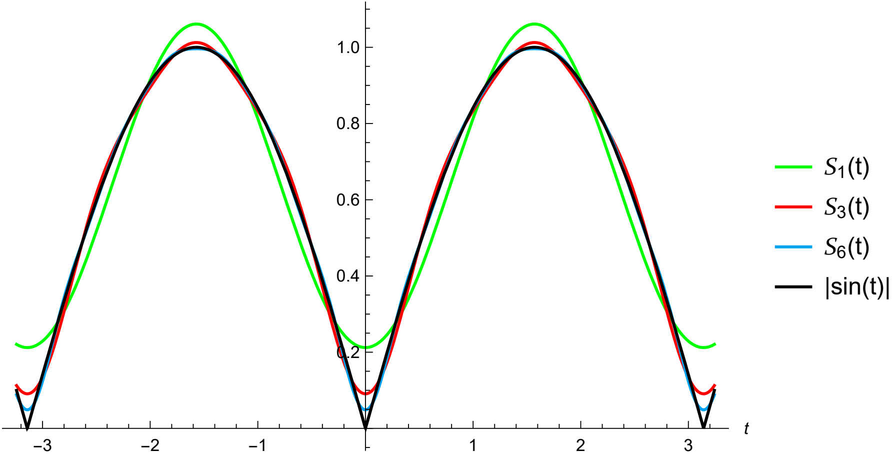
Fourierova řada této funkce je

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt).$$

Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathscr{F}_f(t) = |\sin t|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Příklad (Pokračování)

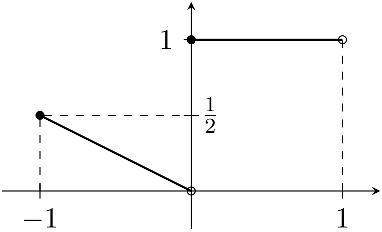
Označme $S_l = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{l} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt)$.



Příklady

Příklad

Funkce $f : [-1, 1) \to \mathbb{R}$ má graf

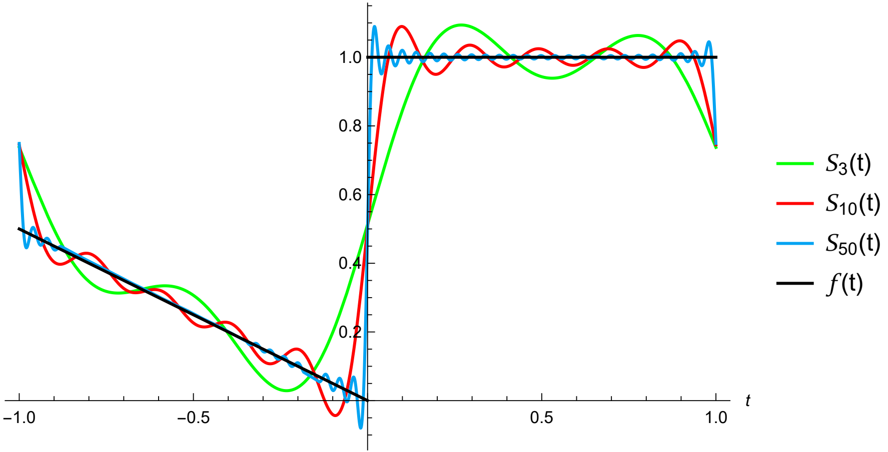


Její Fourierova řada je

$$\frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^k}{2k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{2 - (-1)^k}{2k\pi} \sin(k\pi t) \, .$$

Příklad (Pokračování)

Označme $S_l = \frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^k}{2k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{2-(-1)^k}{2k\pi} \sin(k\pi t)$.



Příklady

Příklad (Pokračování)

Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathscr{F}_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická funkce s periodou 2, která splňuje

$$\mathscr{F}_f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & t = -1, \\ -\frac{t}{2}, & t \in (-1, 0), \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, 1). \end{cases}$$

Odtud například vidíme, že $\mathscr{F}_f(-7) = \frac{3}{4}$.