Matematická analýza 2

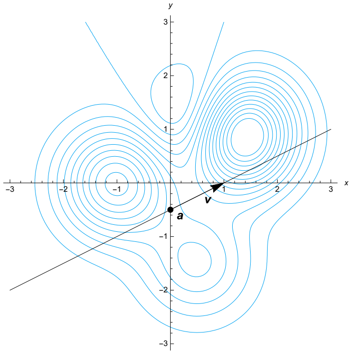
Směrová a parciální derivace

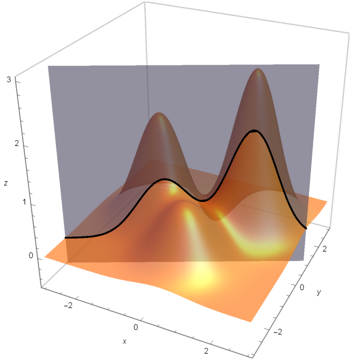
Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace

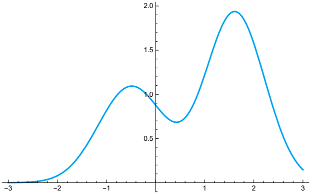
- Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ přiřazuje bodům na mapě D nadmořskou výšku.
- V mapě se vydáme z bodu $\boldsymbol{a}$ rovnoměrně přímočaře rychlostí $\boldsymbol{v}$. Jaká bude okamžitá změna nadmořské výšky v bodě $\boldsymbol{a}$?





Motivace

- Zkonstruujeme „průřezovou funkci“ $\varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$.



- Okamžitá změna nadmořské výšky v bodě $\boldsymbol{a}$ při rovnoměrně přímočarém pohybu rychlostí $\boldsymbol{v}$ je

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Směrová derivace

Definice (směrová derivace)

Ať $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a}$ je vnitřní bod množiny D a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Vektor $\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^m$ se nazývá směrová derivace (řádu 1) funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ podle $\boldsymbol{v}$, jestliže

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Má-li $\boldsymbol{f}$ v nějakém bodě směrovou derivaci (řádu 1) podle $\boldsymbol{v}$, potom se funkce

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

nazývá směrová derivace (řádu 1) funkce $\boldsymbol{f}$ podle $\boldsymbol{v}$.

Směrová derivace

- Položme $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$. Potom

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(0)}{t} = \boldsymbol{\varphi}'(0),$$

  kde $\boldsymbol{\varphi}'(0) = (\varphi_1'(0), \ldots, \varphi_m'(0))$.
- Existuje-li směrová derivace $\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, pak je určena jednoznačně.
- $\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (\nabla_{\boldsymbol{v}} f_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \nabla_{\boldsymbol{v}} f_m(\boldsymbol{a}))$, má-li jedna ze stran rovnosti smysl.
- $\nabla_{\mathbf{0}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.
- Funkce $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ je spojitá, ale nemá směrovou derivaci v bodě $\mathbf{0}$ podle žádného vektoru $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Směrová derivace

Příklad

1. Ať $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$. Potom pro každé $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je
$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$
2. Mějme funkci $f(x, y) = -x^2 - 4y^2$ a vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom
$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(x, y) = -2xv_1 - 8yv_2.$$
Speciálně
$$\nabla_{(0,1)} f(2, 1) = -8,$$
$$\nabla_{(-1,0)} f(2, 1) = 4.$$

Směrová derivace

Tvrzení (směrová derivace a aritmetické operace)

Nechť reálné funkce f a g mají směrovou derivaci v bodě $\boldsymbol{a}$ podle $\boldsymbol{v}$. Potom

1. $\nabla_{\boldsymbol{v}} (f+g)(\boldsymbol{a}) = \nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) + \nabla_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{a})$;
2. $\nabla_{\boldsymbol{v}} (fg)(\boldsymbol{a}) = [\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})]\, g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\, [\nabla_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{a})]$;
3. *je-li* $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, *pak*

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \frac{f}{g}(\boldsymbol{a}) = \frac{[\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})]\, g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})\, [\nabla_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{a})]}{[g(\boldsymbol{a})]^2}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Směrová derivace vyšších řádů

Definice (směrová derivace vyšších řádů)

Ať $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

1. Je-li $k \geq 2$ přirozené číslo, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{a}$ je vnitřní bod definičního oboru funkce $\nabla_{\boldsymbol{v}_{k-1}} \dots \nabla_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{f}$, potom se vektor
$$\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \dots \nabla_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) := \nabla_{\boldsymbol{v}_k} \left(\nabla_{\boldsymbol{v}_{k-1}} \dots \nabla_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{f}\right)(\boldsymbol{a})$$
nazývá směrová derivace funkce $\boldsymbol{f}$ řádu k v bodě $\boldsymbol{a}$ podle $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$.
2. Existuje-li v nějakém bodě směrová derivace funkce $\boldsymbol{f}$ řádu k podle $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$, potom funkci
$$\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \dots \nabla_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}_k} \dots \nabla_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
nazýváme směrovou derivací funkce $\boldsymbol{f}$ řádu k podle $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$.

Směrová derivace vyšších řádů

- Značení:
  - $\nabla^0_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$.
  - $\nabla^k_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ ... směrová derivaci řádu $k \in \mathbb{N}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ podle $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{h}, \ldots, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{h}$.
- Později si ukážeme, že obecně neplatí rovnost mezi $\nabla_{\boldsymbol{w}} \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ a $\nabla_{\boldsymbol{v}} \nabla_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Příklad

Uvažme funkci $f(x,y) = -x^2 - 4y^2$. Již víme, že pro $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ je $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(x,y) = -2xv_1 - 8yv_2$. Pro $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ proto je

$$\nabla_{\boldsymbol{w}} \nabla_{\boldsymbol{v}} f(x,y) = -2v_1w_1 - 8v_2w_2.$$

Speciálně

$$\nabla^2_{\boldsymbol{v}} f(x,y) = -2v_1^2 - 8v_2^2.$$

Je směrová derivace $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ lineární vzhledem k $\boldsymbol{v}$?

Pro funkci $f(x,y) = -x^2 - 4y^2$ je pro každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zobrazení

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} f(x,y) = -2xv_1 - 8yv_2$$

lineární. Je to obecný jev?

Tvrzení (homogenita směrové derivace vzhledem k $\boldsymbol{v}$)

Ať $\alpha \in \mathbb{R}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ má směrovou derivaci v bodě $\boldsymbol{a}$ podle $\boldsymbol{v}$. Potom

$$\nabla_{\alpha\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \alpha\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Je směrová derivace $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ lineární vzhledem k $\boldsymbol{v}$?

Příklad

Nechť $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ a

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Potom

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \begin{cases} \frac{v_1^2}{v_2}, & \text{je-li } v_1 \in \mathbb{R} \text{ a } v_2 \neq 0; \\ 0, & \text{je-li } v_1 \in \mathbb{R} \text{ a } v_2 = 0. \end{cases}$$

Tedy $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} f(0,0)$ není lineární zobrazení.

Parciální derivace – motivace

Úmluva

Pokud neřekneme jinak, budeme pod symbolem $\boldsymbol{e}_i$ rozumět i-tý vektor standardní báze v $\mathbb{R}^n$. Tedy

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

- Ukázali jsme si, že $\boldsymbol{v} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ není obecně lineární zobrazení.
- Později však uvidíme, že pro „hezké" funkce je $\boldsymbol{v} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ lineární.
- Pokud $\boldsymbol{v} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ je lineární, pak pro $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ je

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Parciální derivace

Definice (parciální derivace)

Nechť $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{a}$ je vnitřní bod množiny D. Směrová derivace

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{t}$$

se nazývá parciální derivace (řádu 1) funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné. Místo $\nabla_{\boldsymbol{e}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ píšeme $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, kde x_i označuje i-tou proměnnou funkce $\boldsymbol{f}$, a v takovém případě často mluvíme o parciální derivaci (řádu 1) funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ podle x_i.
Má-li $\boldsymbol{f}$ parciální derivaci v nějakém bodě, pak se

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

nazývá parciální derivace (řádu 1) funkce $\boldsymbol{f}$ podle i-té proměnné (případně parciální derivace (řádu 1) funkce $\boldsymbol{f}$ podle x_i).

Parciální derivace

- Alternativní značení $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$: $\partial_{x_i}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $\partial_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{f}_{x_i}(\boldsymbol{a})$ apod.
- Existuje-li parciální derivace, pak je určena jednoznačně.
- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reálná funkce jedné reálné proměnné x, pak
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a).$$
- Ať $f_1, \dots, f_m$ jsou složky vektorové funkce $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Potom
$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right).$$
má-li jedna ze stran rovnosti smysl.
- Je-li $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ vektorová funkce jedné reálné proměnné x, pak místo $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}(a)$ píšeme $\boldsymbol{f}'(a)$ (případně $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}x}(a)$). Zřejmě
$$\boldsymbol{f}'(a) = \left(f_1'(a), \dots, f_m'(a) \right).$$

Parciální derivace

Příklad

Pro $\boldsymbol{f}(t) = (t, t^2)$ máme

$$\boldsymbol{f}'(t) = (1, 2t).$$

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 - 3y^3 + x^4y^3.$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^3y^3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -9y^2 + 3x^4y^2.$$

Parciální derivace

Příklad

Je-li

$$f(x,y)=\frac{e^{2x+y}}{y},$$

pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2}{y}e^{2x+y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y-1}{y^2}e^{2x+y}.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (parciální derivace vyšších řádů)

Ať $\boldsymbol{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$ a $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Potom parciální derivace funkce $\boldsymbol{f}$ řádu k v bodě $\boldsymbol{a}$ podle $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ je vektor

$$\frac{\partial^k \boldsymbol{f}}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) := \nabla_{\boldsymbol{e}_{i_k}} \ldots \nabla_{\boldsymbol{e}_{i_1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Existuje-li v nějakém bodě parciální derivace funkce $\boldsymbol{f}$ řádu k podle $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, potom funkci

$$\frac{\partial^k \boldsymbol{f}}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial^k \boldsymbol{f}}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$$

nazýváme parciální derivací funkce $\boldsymbol{f}$ řádu k podle $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

Parciální derivace vyšších řádů

Terminologie a značení:

- Místo „parciální derivace řádu k" říkáme také k-tá parciální derivace.
- Smíšenou parciální derivací rozumíme parciální derivaci, ve které derivujeme alespoň podle dvou různých proměnných.
- Místo

$$\frac{\partial^k \boldsymbol{f}}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}).$$

  můžeme také psát $\partial_{x_{i_k}} \ldots \partial_{x_{i_1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{f}_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}(\boldsymbol{a})$ apod.
- Pokud se bezprostředně za sebou opakuje derivování podle jedné a téže proměnné, zápis často ještě zkracujeme. Například

$$\frac{\partial^5 \boldsymbol{f}}{\partial z \partial x \partial x \partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^5 \boldsymbol{f}}{\partial z \partial x^2 \partial y \partial x}(x, y, z) = \partial_z \partial_x^2 \partial_y \partial_x \boldsymbol{f}(x, y, z).$$

Parciální derivace vyšších řádů

Příklad

Je dána funkce

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= e^x \sin y,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -e^x \sin y,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= e^x \cos y,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= e^x \cos y.
\end{aligned}$$

Záměnnost parciálních derivací

Příklad

Ať

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2+y^2}, & \text{pro } (x,y) \neq 0; \\ 0, & \text{pro } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(0,0).$$

Věta (Schwarzova věta)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$, potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Důležité rovnice (nejen) ve fyzice

1. Laplaceova rovnice:

$$\Delta u = 0,$$

kde $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ se nazývá Laplaceův operátor.

2. Rovnice vedení tepla (nazývaná také rovnice difúze):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0,$$

kde $k > 0$.

3. Vlnová rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

kde $c > 0$.